MAT-206/360: Inferencia Estadística **Semestre 2, 2018**
Tarea 1. Octubre 16, 2018 **Prof. Felipe Osorio**
Fecha de entrega: Octubre 23, 2018

---

1. Considere la función de densidad de probabilidad

$$f(y;\nu) = \frac{\Gamma(y+r)}{y!\Gamma(r)}\Big(\frac{1}{1+\nu}\Big)^r\Big(\frac{\nu}{1+\nu}\Big)^y$$

donde $\pi = \nu/(1+\nu)$ y $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ es la función gama, además suponga que r es conocido. Muestre que esta función pertenece a la familia exponencial y encuentre $\mathrm{E}(Y)$ y $\mathrm{Var}(Y)$.

2. Muestre que la distribución Gama, con densidad

$$f(y;\mu,\phi) = \frac{\phi^\phi y^{\phi-1}\exp(-y\phi/\mu)}{\mu^\phi\Gamma(\phi)}, \quad y \geq 0, \phi > 0, \mu > 0$$

pertenece a la familia exponencial y obtenga $\boldsymbol{\mathcal{F}}(\boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\theta} = (\mu,\phi)^\top$.

Sugerencia: Recuerde que $\psi(z) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\log\Gamma(z)$ se conoce como la función digama. Además $\psi'(z) = \mathrm{d}\psi(z)/\,\mathrm{d}z$. En general se tiene

$$\psi^{(n)}(z) = \frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}z^{n+1}}\log\Gamma(z)$$

3. Considere $Y_1,\dots,Y_n$ variables aleatorias independientes con distribución $\mathcal{N}(\mu_i,\phi)$ y $\mu_i = \mu_i(\boldsymbol{\beta})$, $i = 1,\dots,n$, $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^p$ vector de parámetros desconocidos. Obtenga la función de log-verosimilitud $\ell(\boldsymbol{\theta};\boldsymbol{y})$, $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\beta}^\top,\phi)^\top$ y calcule el vector score $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{\theta}) = \partial\ell(\boldsymbol{\theta};\boldsymbol{y})/\partial\boldsymbol{\theta}$.

4. Sea $Y_1,\dots,Y_n$ una muestra aleatoria desde una variable con densidad

$$f(y;\theta) = \tfrac{1}{2}(1+\theta y), \quad -1 \leq y \leq 1, -1 \leq \theta \leq 1.$$

Obtenga la función score $U(\theta)$ y la información de Fisher $\mathcal{F}(\theta)$.

5. Sean $X_{11},\dots,X_{1n_1},X_{21},\dots,X_{2n_2}$ variables aleatorias independientes cada una con $X_{ij} \sim \mathsf{Exp}(\lambda_i)$, $j = 1,\dots,n_i$, $i = 1,2$; y $\theta = (\lambda_1,\lambda_2)^\top$. Muestre que la distribución conjunta de $\boldsymbol{X} = (X_{11},\dots,X_{1n_1},X_{21},\dots,X_{2n_2})^\top$ pertenece a la familia exponencial k-paramétrica. Determine k.

6. Sea $X \sim \mathsf{Poisson}(\mu)$. La variable aleatoria Poisson truncada Z es definida como

$$P_\mu(Z = k) = P_\mu(X = k|X > 0).$$

Calcule las informaciones de Fisher $\mathcal{F}_X(\mu)$ y $\mathcal{F}_Z(\mu)$.

7. Considere $X \sim \mathsf{Exp}(\lambda)$ con función de densidad

$$f(x;\lambda) = \lambda\exp(-\lambda x)\,I_{(0,\infty)}(x),$$

y considere $\theta = \mathrm{P}(X > z)$ el parámetro de interés, con z conocido. Obtenga la información de Fisher de θ.

8. Suponga que el objetivo es estimar la probabilidad θ de cierto evento y considere que se dispone de dos $\mathsf{m.a.}(n)$ dadas por:

$$X_1, \dots, X_n \overset{\mathsf{IID}}{\sim} \mathsf{Bin}(1, \theta), \qquad Y_1, \dots, Y_n \overset{\mathsf{IID}}{\sim} \mathsf{Geo}(\theta),$$

Usando la información de Fisher, ¿cuál muestra es más informativa?

Recuerde que: si $X \sim \mathsf{Bin}(1, \theta)$ y $Y \sim \mathsf{Geo}(\theta)$, entonces

$$f(x; \theta) = \theta^x (1-\theta)^{1-x}, \quad x \in \{0, 1\}, \qquad f(y; \theta) = \theta(1-\theta)^{y-1}, \quad y = 1, 2, \dots$$

9. Una variable aleatoria discreta X definida en $\{0, 1, \dots\}$ tiene una distribución de *serie de potencias* si su función de probabilidad es de la forma:

$$\mathrm{P}(X = x) = \frac{a(x)\theta^x}{C(\theta)}, \qquad x = 0, 1, 2, \dots.$$

a) Muestre que X pertenece a la familia exponencial.

b) Obtenga fórmulas para $\mathrm{E}(X)$ y $\mathrm{Var}(X)$.

Sugerencia: Fórmulas en **b)** involucran derivadas de C.

10. Sea $\boldsymbol{X} \sim \mathsf{Multinomial}_k(n, \boldsymbol{\pi})$ con función de probabilidad

$$p(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\pi}) = \frac{n!}{x_1! \cdots x_k!} \prod_{j=1}^{k} \pi_j^{x_j},$$

donde $\boldsymbol{x} \in \{0, 1, \dots, n\}^k$ y $\sum_{j=1}^k x_j = n$. Además, asumiremos que $\pi_j > 0$ con $\sum_{j=1}^k \pi_j = 1$.

a) Obtenga los MLEs de $\pi_1, \dots, \pi_{k-1}$.

c) Calcule la matriz de información de Fisher de $\boldsymbol{\theta} = (\pi_1, \dots, \pi_{k-1})^\top$.