

MAT-042: Cálculo de probabilidades

Felipe Osorio

fosorios.mat.utfsm.cl

Departamento de Matemática, UTFSM



Definición 1 (Espacio muestral):

El conjunto Ω , de todos los resultados posibles de un experimento, es llamado **espacio muestral** para el experimento.

Ejemplos:

- ▶ Lanzar una moneda, en cuyo caso tenemos sólo 2 resultados posibles

$$\Omega = \{\text{Cara, Sello}\}$$

- ▶ Notas de MAT021 para un grupo de estudiantes escogidos al azar

$$\Omega = \{0, 1, \dots, 99, 100\}$$

- ▶ Vida útil de un artículo y se determina su tiempo de duración

$$\Omega = [0, \infty)$$



Definición 2 (Evento):

Un **evento** (suceso) es cualquier colección de resultados posibles del experimento, esto es, **cualquier subconjunto** de Ω .¹

Observación:

Sea $A \subseteq \Omega$ diremos que **A ocurre** si $\omega \in A$ con $\omega \in \Omega$ es un resultado asociado a un experimento.

¹incluyendo el propio Ω



Inclusión e igualdad:

La inclusión e igualdad entre conjuntos se definen como:

$$A \subset B \iff x \in A \Rightarrow x \in B, \quad A = B \iff A \subset B \text{ y } B \subset A.$$

Unión:

La **unión** entre A y B denotada por $A \cup B$ es definida como

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ o } x \in B\}.$$

Intersección:

La **intersección** entre A y B escrita como $A \cap B$ se define como

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ y } x \in B\}.$$

Complemento:

El **complemento** de A , escrito como A^c es el conjunto de todos los elementos que **no** están en A

$$A^c = \{x : x \notin A\}.$$



Propiedades:

$$(a) A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A.$$

$$(b) A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C, \\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C.$$

$$(c) A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \\ A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$(d) (A \cup B)^c = A^c \cap B^c, \quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c \text{ (Leyes de De Morgan).}$$

Las operaciones anteriores de unión e intersección se pueden extender a **colecciones infinitas** de conjuntos

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \{x \in C: x \in A_i \text{ para algún } i\},$$

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \{x \in C: x \in A_i \text{ para todo } i\}.$$



Definición 3:

Dos eventos A y B son **disjuntos** (excluyentes) si:

$$A \cap B = \emptyset$$

Los eventos A_1, A_2, \dots son **disjuntos por pares**² si

$$A_i \cap A_j = \emptyset, \quad \text{si } i \neq j.$$

Definición 4:

Si A_1, A_2, \dots son disjuntos por pares y $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega$, entonces la colección se llama una **partición** de Ω .

Ejemplos:

- ▶ Los conjuntos $A_i = [i, i + 1)$, $i = 0, 1, 2, \dots$ forman una partición de $[0, \infty)$.
- ▶ $\Omega = A \cup A^c$ es partición.

²o mutuamente excluyentes

Para todo $A \subset \Omega$, deseamos asociar un número entre 0 y 1, llamado **probabilidad** de A .

Definición 5:

Una colección de subconjuntos de Ω es llamado σ -álgebra denotada por \mathcal{A} si satisface las propiedades

- (a) $\emptyset \in \mathcal{A}$.
- (b) Si $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$.
- (c) Si $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A}$.

Observación

Note que $\emptyset \subset \Omega$ y $\Omega = \emptyset^c$, así por (a) y (b), sigue que $\Omega \in \mathcal{A}$.



Además, si $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$, entonces $A_1^c, A_2^c, \dots \in \mathcal{A}$ y de este modo

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c \in \mathcal{A},$$

por las leyes de De Morgan, tenemos

$$\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c \right)^c = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}.$$

Observación

Asociado al espacio muestral Ω puede haber muchas σ -álgebras. Por ejemplo, la colección $\{\emptyset, \Omega\}$ es σ -álgebra (minimal).



Definición 6 (Probabilidad):

Dado un espacio muestral Ω y una σ -álgebra asociada \mathcal{A} , una **función de probabilidad** $P : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ satisface:

- (a) $P(A) \geq 0$, para todo $A \in \mathcal{A}$.
- (b) $P(\Omega) = 1$
- (c) Si A_1, A_2, \dots son disjuntos por pares, entonces

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Observación:

La terna (Ω, \mathcal{A}, P) se denomina **espacio de probabilidad**.



Resultado 1:

Si P es una función de probabilidad y A es cualquier conjunto en \mathcal{A} . Entonces,

- (a) $P(\emptyset) = 0$, donde \emptyset es el conjunto vacío.
- (b) $P(A) \leq 1$.
- (c) $P(A^c) = 1 - P(A)$.

Resultado 2:

Si P es una función de probabilidad y $A, B \in \mathcal{A}$. Entonces,

- (a) $P(B \cap A^c) = P(B) - P(A \cap B)$.
- (b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
- (c) Si $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$.



Resultado 3:

Si P es función de probabilidad. Entonces,

(a) $P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A \cap C_i)$ para cualquier partición C_1, C_2, \dots

(b) $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ para conjuntos A_1, A_2, \dots cualquiera.³

Observación:

Usando la desigualdad de Boole, tenemos

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i^c\right) \leq \sum_{i=1}^n P(A_i^c).$$

³desigualdad de Boole

Principio de multiplicación:

Suponga que un experimento consta de 2 etapas, y que la 1ra se realiza en n_1 maneras, mientras que la 2da en n_2 maneras. Es decir, el experimento se puede desarrollar en

$$n_1 \cdot n_2 \text{ maneras.}$$

Observación:

Esto puede extenderse a experimentos con k etapas. De este modo, el experimento se puede desarrollar de

$$n_1 \cdot n_2 \cdots n_k = \prod_{i=1}^k n_i,$$

maneras.



Principio de adición:

Suponga que un experimento consta de 2 etapas, y que la 1ra se realiza en n_1 maneras, mientras que la 2da en n_2 maneras. Además, suponga que ambas etapas **no** se pueden desarrollar juntas. Entonces, el experimento se puede desarrollar en

$$n_1 + n_2 \text{ maneras.}$$

Observación:

Esto puede extenderse a k etapas. En cuyo caso tenemos

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_k = \sum_{i=1}^k n_i,$$

maneras para desarrollar el experimento.



Suponga el conjunto $A = \{a, b, c\}$. Deseamos conocer el número de permutaciones de los 3 elementos de A . Podemos notar que

$$abc, acb, bac, bca, cab, cba,$$

es decir, tenemos 6 permutaciones.

Definición 7 (Permutaciones):

Sea $A \neq \emptyset$ un conjunto finito tal que $\#(A) = n$. Se denomina **permutación** a todo subconjunto de k elementos (distinguiendo el orden) que se pueden formar desde los n objetos. De este modo, el **número total de permutaciones** es:

$$p_{nk} = n(n-1) \cdots (n-k+1).$$



Observación:

El número total de permutaciones de un conjunto con n objetos es

$$p_{nn} = n(n-1) \cdots 2 \cdot 1.$$

Escribimos por simplicidad $p_{nn} = p_n$ y podemos notar que $p_n = np_{n-1}$.

Observación:

p_n es llamado n factorial y es dado por:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n = \prod_{k=1}^n k.$$

Además,⁴

$$n! = (n-1)!n, \quad 0! = 1.$$

Por otro lado, podemos escribir

$$p_{nk} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

⁴para n no entero podemos hacer $n! = \Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$.



Considere $A = \{a, b, c, d\}$ y suponga que deseamos todas las **combinaciones de 2 elementos** desde el conjunto A . De este modo,

$$ab \quad ac, \quad ad, \quad bc, \quad bd, \quad cd,$$

es decir, tenemos 6 combinaciones.⁵

Definición 8 (Combinaciones):

Sea $A \neq \emptyset$ conjunto finito tal que $\#(A) = n$. Llamamos **combinación** de k elementos a todo conjunto **diferente** de k elementos tomado desde n . De esta manera el **número de combinaciones** es

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k(k-1) \cdots 1} = \frac{p_{nk}}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

⁵ ab y ba sólo difieren en el orden.



Propiedades:

(a) Condición de simetría:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

(b) Fórmula para adición

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}, \quad k \text{ entero.}$$

(c) Fórmulas para sumatorias

$$\sum_{k=0}^n \binom{k}{m} = \binom{0}{m} + \binom{1}{m} + \cdots + \binom{n}{m} = \binom{n+1}{m+1}.$$

(d) Teorema del binomio

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$



Suponga

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k\}.$$

Deseamos caracterizar $P(A)$ para **eventos elementales**. Es decir, $A = \{\omega_i\}$ y consideramos

$$p_i = P(\{\omega_i\}), \quad i = 1, \dots, k.$$

De este modo,

- (a) $p_i \geq 0$, para $i = 1, \dots, k$.
- (b) $p_1 + p_2 + \dots + p_k = 1$.



Suponga que cada $\{\omega_i\}$ es igualmente probable. Entonces

$$p_i = P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{k}.$$

Luego, para un evento

$$A = \{\omega_{j_1}, \dots, \omega_{j_r}\},$$

sigue que

$$P(A) = \frac{r}{k},$$

o bien

$$P(A) = \frac{\#(A)}{\#(\Omega)}.$$

Observación:

Esta **no** es una definición general de probabilidad, sino apropiada **sólo** para nuestro contexto.



Ejemplo (problema del cumpleaños):

Suponga un grupo de k personas. Se desea calcular la probabilidad de que **2 personas cumplan años el mismo día**. Entonces tenemos

$$\frac{p_{365,k}}{365^k} = \frac{365 \cdot 364 \cdots (365 - k + 1)}{365^k},$$

y por la regla del complemento

$$P(\{\text{al menos un par de personas cumplan el mismo día}\}) = 1 - \frac{p_{365,k}}{365^k}.$$

Por ejemplo,

k	10	20	22	50
Prob.	0.117	0.411	0.476	0.970

