MAT-042: Probabilidad condicional, teorema de Bayes e independencia

Felipe Osorio

fosorios.mat.utfsm.cl

Departamento de Matemática, UTFSM

Probabilidad condicional

Ejemplo:

Considere un lote con 80 artículos sin defectos y 20 defectuosos. Suponga que se selecciona 2 artículos. (a) con sustitución y (b) sin sustitución. Defina los eventos

$$A = \{\text{el 1er artículo es defectuoso}\},$$
$$B = \{\text{el 2do artículo es defectuoso}\}.$$

Cuando escogemos **con** sustitución, tenemos

$$\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(B) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}.$$

Cuando escogemos **sin** sustitución, tenemos

$$\mathsf{P}(A) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5},$$

pero, ¿Cambia $\mathsf{P}(B)$?

Probabilidad condicional

Definición 1 (Probabilidad condicional):

Si A y B son dos eventos en Ω y $\mathsf{P}(B) > 0$, entonces la probabilidad condicional de A dado B, escrito como $\mathsf{P}(A|B)$ es dada por:

$$\mathsf{P}(A|B) = \frac{\mathsf{P}(A \cap B)}{\mathsf{P}(B)}.$$

Observación:

Note que $\mathsf{P}(B|B) = 1$ es decir, B "actúa" como Ω. En efecto, note que $A = A \cap \Omega$, así

$$\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(A|\Omega) = \frac{\mathsf{P}(A \cap \Omega)}{\mathsf{P}(\Omega)}.$$

Ocurrencias son calibradas con relación a B. En particular, si $A \cap B = \varnothing$, entonces

$$\mathsf{P}(A|B) = \mathsf{P}(B|A) = 0$$

En el ejemplo anterior, se desea calcular $\mathsf{P}(B|A) = \frac{19}{99}$, pues si A ya ha ocurrido sólo quedan 19 defectuosos entre los 99 artículos.

Reexpresando la probabilidad condicional tenemos

$$\mathsf{P}(A \cap B) = \mathsf{P}(A|B)\,\mathsf{P}(B),$$

o bien

$$\mathsf{P}(A \cap B) = \mathsf{P}(B|A)\,\mathsf{P}(A).$$

Estas expresiones permiten "contornar" cálculos complicados, por ejemplo[1]

$$\mathsf{P}(A|B) = \frac{\mathsf{P}(B|A)\,\mathsf{P}(A)}{\mathsf{P}(B)}.$$

[1] Este es un caso particular del Teorema de Bayes.

Probabilidad condicional

Ocurrencias son calibradas con relación a B. En particular, si $A \cap B = \varnothing$, entonces

$$\mathsf{P}(A|B) = \mathsf{P}(B|A) = 0$$

En el ejemplo anterior, se desea calcular $\mathsf{P}(B|A) = \frac{19}{99}$, pues si A ya ha ocurrido sólo quedan 19 defectuosos entre los 99 artículos.

Reexpresando la probabilidad condicional tenemos

$$\mathsf{P}(A \cap B) = \mathsf{P}(A|B)\,\mathsf{P}(B),$$

o bien

$$\mathsf{P}(A \cap B) = \mathsf{P}(B|A)\,\mathsf{P}(A).$$

Estas expresiones permiten "contornar" cálculos complicados, por ejemplo[1]

$$\mathsf{P}(A|B) = \frac{\mathsf{P}(B|A)\,\mathsf{P}(A)}{\mathsf{P}(B)}.$$

[1] Este es un caso particular del Teorema de Bayes.

Observación:

El espacio de probabilidad definido por $\mathcal{A} \cap B$ permite notar que $\mathsf{P}(A|B)$ es una probabilidad. Es decir, satisface:

(a) $\mathsf{P}(A|B) \geq 0$.

(b) $\mathsf{P}(\Omega|B) = 1$.

(c) Para $\{A_n\}_{n\geq 1}$ sucesión disjunta

$$\mathsf{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n|B\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(A_n|B).$$

Resultado 1 (Teorema de probabilidad total):

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ un espacio de probabilidad y sea $C_1, C_2, \dots,$ una partición contable de Ω, tal que $\mathsf{P}(C_i) \geq 0$, $\forall\, i$. Entonces, para todo $A \in \mathcal{A}$

$$\mathsf{P}(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathsf{P}(A|C_i)\,\mathsf{P}(C_i).$$

Demostración:

Como los C_i's forman una partición, tenemos que

$$A = A \cap \Omega = A \cap \Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i\Big) = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A \cap C_i),$$

además

$$\mathsf{P}(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathsf{P}(A \cap C_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathsf{P}(A|C_i)\,\mathsf{P}(C_i).$$

Resultado 1 (Teorema de probabilidad total):

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ un espacio de probabilidad y sea $C_1, C_2, \ldots,$ una partición contable de Ω, tal que $\mathsf{P}(C_i) \geq 0$, $\forall\, i$. Entonces, para todo $A \in \mathcal{A}$

$$\mathsf{P}(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathsf{P}(A|C_i)\,\mathsf{P}(C_i).$$

Demostración:

Como los C_i's forman una partición, tenemos que

$$A = A \cap \Omega = A \cap \Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i\Big) = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A \cap C_i),$$

además

$$\mathsf{P}(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathsf{P}(A \cap C_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathsf{P}(A|C_i)\,\mathsf{P}(C_i).$$

EX UMBRA IN SOLEM

Resultado 2 (Teorema de Bayes):

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ un espacio de probabilidad y sea $\{C_i\}$ partición contable de Ω, con $\mathsf{P}(C_i) \geq 0$, $\forall\, i$. Entonces, para todo $A \in \mathcal{A}$, tenemos que

$$\mathsf{P}(C_i|A) = \frac{\mathsf{P}(A|C_i)\,\mathsf{P}(C_i)}{\sum_{i=1}^{\infty} \mathsf{P}(A|C_i)\,\mathsf{P}(C_i)}, \qquad \mathsf{P}(A) > 0.$$

Demostración:

Tenemos que

$$\mathsf{P}(C_i|A)\,\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(A|C_i)\,\mathsf{P}(C_i),$$

así

$$\mathsf{P}(C_i|A) = \frac{\mathsf{P}(A|C_i)\,\mathsf{P}(C_i)}{\mathsf{P}(A)}, \qquad \mathsf{P}(A) > 0.$$

Por el Teorema de Probabilidad total, sigue que

$$\mathsf{P}(C_i|A) = \frac{\mathsf{P}(A|C_i)\,\mathsf{P}(C_i)}{\sum_{i=1}^{\infty} \mathsf{P}(A|C_i)\,\mathsf{P}(C_i)}.$$

Ejemplo:

Considere el lote de 20 artículos defectuosos y 80 sin defectos, desde los que se escoge 2 artículos sin reemplazo. Sea,

$$\begin{aligned} A &= \{\text{el 1er artículo es defectuoso}\}, \\ B &= \{\text{el 2do artículo es defectuoso}\}. \end{aligned}$$

Para calcular, $\mathsf{P}(B)$ podemos hacer[2]

$$\begin{aligned} \mathsf{P}(B) &= \mathsf{P}(B|A)\,\mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B|A^c)\,\mathsf{P}(A^c) \\ &= \frac{19}{99}\cdot\frac{1}{5} + \frac{20}{99}\cdot\frac{4}{5} \\ &= \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{99}(19 + 20\cdot 4) = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

[2] Compare este resultado al **con** sustitución.

Definición 2 (Independencia):

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ un espacio de probabilidad y sean $A, B \in \mathcal{A}$. Se dice que A y B son independientes, si y sólo si

$$\mathsf{P}(A \cap B) = \mathsf{P}(A) \cdot \mathsf{P}(B).$$

Observación:

Podemos entender la independencia como: *la ocurrencia de un evento B no tiene efecto en la probabilidad de otro evento A.* Es decir

$$\mathsf{P}(A|B) = \mathsf{P}(A).$$

Note también que

$$\mathsf{P}(B|A) = \frac{\mathsf{P}(A|B)\,\mathsf{P}(B)}{\mathsf{P}(A)} = \frac{\mathsf{P}(A)\,\mathsf{P}(B)}{\mathsf{P}(A)} = \mathsf{P}(B),$$

es decir la ocurrencia de A **no** tiene efecto en la probabilidad de B.

Definición 2 (Independencia):

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ un espacio de probabilidad y sean $A, B \in \mathcal{A}$. Se dice que A y B son independientes, si y sólo si

$$\mathsf{P}(A \cap B) = \mathsf{P}(A) \cdot \mathsf{P}(B).$$

Observación:

Podemos entender la independencia como: *la ocurrencia de un evento B no tiene efecto en la probabilidad de otro evento A.* Es decir

$$\mathsf{P}(A|B) = \mathsf{P}(A).$$

Note también que

$$\mathsf{P}(B|A) = \frac{\mathsf{P}(A|B)\,\mathsf{P}(B)}{\mathsf{P}(A)} = \frac{\mathsf{P}(A)\,\mathsf{P}(B)}{\mathsf{P}(A)} = \mathsf{P}(B),$$

es decir la ocurrencia de A **no** tiene efecto en la probabilidad de B.

Resultado 3:

Si A y B son independientes, entonces también son independientes:

(a) A y B^c.

(b) A^c y B.

(c) A^c y B^c.

Demostración: *(solamente parte (a))*

Para probar (a),[3] note que

$$\begin{aligned} \mathsf{P}(A \cap B^c) &= \mathsf{P}(A) - \mathsf{P}(A \cap B) = \mathsf{P}(A) - \mathsf{P}(A)\,\mathsf{P}(B) \\ &= \mathsf{P}(A)(1 - \mathsf{P}(B)) = \mathsf{P}(A)\,\mathsf{P}(B^c). \end{aligned}$$

[3] Parte (b) y (c): Tarea.

Resultado 4:

Una colección de eventos $A_1, \dots, A_n$ es mutuamente independiente, si para cualquier subcolección $A_{i_1}, \dots, A_{i_k}$, tenemos

$$\mathsf{P}\Big(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\Big) = \prod_{j=1}^{k} \mathsf{P}(A_{i_j}).$$

Ejemplo:

Se lanzan 3 dados de distinto color: blanco, rojo y negro ¿Cuál es la probabilidad de que el dado blanco salga 3, y los otros dos no?

Sean A, B y C

$$\begin{aligned} A &= \{\text{el resultado del dado blanco es 3}\}, \\ B &= \{\text{el resultado del dado rojo es 3}\}, \\ C &= \{\text{el resultado del dado negro es 3}\}. \end{aligned}$$

Tenemos $\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(B) = \mathsf{P}(C) = \frac{1}{6}$ y se pide calcular

$$\mathsf{P}(A \cap B^c \cap C^c) = \mathsf{P}(A)\,\mathsf{P}(B^c)\,\mathsf{P}(C^c) = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{216}.$$

Ejercicio:

En 28 tarjetas se escriben las 28 letras del abecedario. Se eligen sucesivamente, sin reemplazo, cuatro tarjetas al azar. Calcule la probabilidad de que:

(a) Se obtenga en orden la palabra "DATO".

(b) Se pueda escribir con las cuatro letras la palabra "DATO".

Solución:

(a) Es claro que,

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(D.A.T.O) &= \mathsf{P}(D)\,\mathsf{P}(A|D)\,\mathsf{P}(T|D\cap A)\,\mathsf{P}(O|D\cap A\cap T)\\ &= \frac{1}{28}\cdot\frac{1}{27}\cdot\frac{1}{26}\cdot\frac{1}{25} = \frac{24!}{28!}\end{aligned}$$

(b) Podemos reordenar las 4 letras obtenidas, es decir

$$p = 4!\,\frac{24!}{28!} = \frac{1}{\frac{28!}{4!\,24!}} = \frac{1}{\binom{28}{24}}.$$

Observación:

Este resultado se puede generalizar para palabras $k < 28$ letras distintas

(a) $p = \dfrac{(28-k)!}{28!}$, (b) $p = \dfrac{1}{\binom{28}{k}}$.

Solución:

(a) Es claro que,

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(D.A.T.O) &= \mathsf{P}(D)\,\mathsf{P}(A|D)\,\mathsf{P}(T|D\cap A)\,\mathsf{P}(O|D\cap A\cap T)\\ &= \frac{1}{28}\cdot\frac{1}{27}\cdot\frac{1}{26}\cdot\frac{1}{25} = \frac{24!}{28!}\end{aligned}$$

(b) Podemos reordenar las 4 letras obtenidas, es decir

$$p = 4!\,\frac{24!}{28!} = \frac{1}{\frac{28!}{4!\,24!}} = \frac{1}{\binom{28}{24}}.$$

Observación:

Este resultado se puede generalizar para palabras $k < 28$ letras distintas

(a) $p = \dfrac{(28-k)!}{28!}$, (b) $p = \dfrac{1}{\binom{28}{k}}$.