

MAT-042: Variable aleatoria

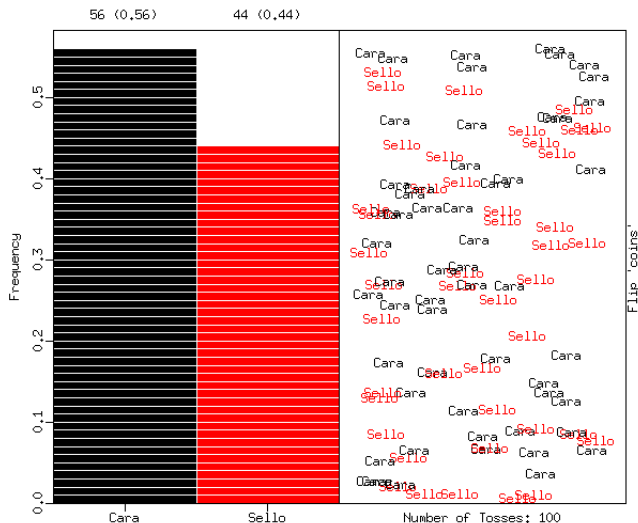
Felipe Osorio

fosorios.mat.utfsm.cl

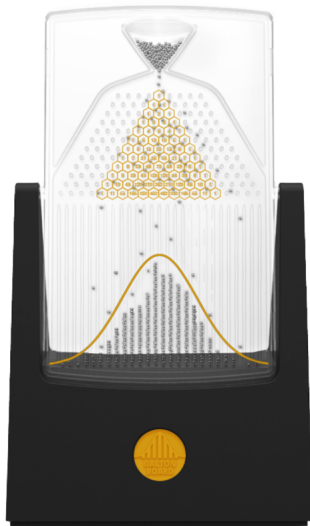
Departamento de Matemática, UTFSM



Lanzamiento de una moneda



Máquina de Galton



Definición 1 (variable aleatoria):

Una **variable aleatoria** X en (Ω, \mathcal{A}, P) es una función real definida en Ω tal que $\{X \leq x\}$ es un evento aleatorio ($x \in \mathbb{R}$). Es decir

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R},$$

es variable aleatoria si $\{X \leq x\} \in \mathcal{A}$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Notación:

Diremos que $X(\omega)$ es variable aleatoria si

$$(X \leq x) \stackrel{\text{def}}{=} \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A},$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.



Definición 2 (distribución de probabilidad):

X es **variable aleatoria discreta** si adopta valores en un conjunto finito o numerable $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, \dots\}$. En este caso se define la **función de probabilidad**

$$p(x_i) = P(X = x_i), \quad i = 1, 2, \dots$$

siempre que satisfaga las propiedades:

- (a) $p(x) \geq 0$, para todo $x \in \mathcal{X}$.
- (b) $\sum_{x_i \in \mathcal{X}} p(x_i) = 1$.



Definición 3 (distribución acumulada):

La *función de distribución acumulada* (CDF) de X denotada por F_X es definida por

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p(x_i).$$

Observación:

Evidentemente, tenemos que:

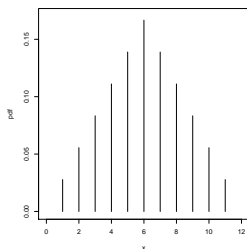
$$F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1].$$



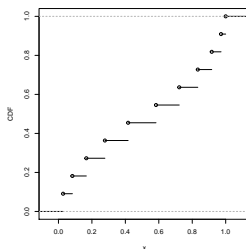
Ejemplo (lanzamiento de dos dados):

Considere el lanzamiento de 2 dados. Sea X la suma de sus caras. Entonces,

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X = x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$
$P(X \leq x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{15}{36}$	$\frac{21}{36}$	$\frac{26}{36}$	$\frac{30}{36}$	$\frac{33}{36}$	$\frac{35}{36}$	$\frac{36}{36}$



(a) $p(x)$



(b) CDF



Propiedades:

- ▶ $x \leq y \Rightarrow F(x) \leq F(y)$ (es no decreciente).
- ▶ F es continua a la derecha.
- ▶ $F(-\infty) = 0$ y $F(+\infty) = 1$. ($0 \leq F(x) \leq 1$)
- ▶ $P(X > x) = 1 - F(x)$.

Además, para variables aleatorias discretas

$$P(X = x) = F(x) - F(x - 1).$$



Definición 3 (función de densidad):

Si existe una función $f(x)$ tal que

(a) $f(x) \geq 0, x \in \mathbb{R}.$

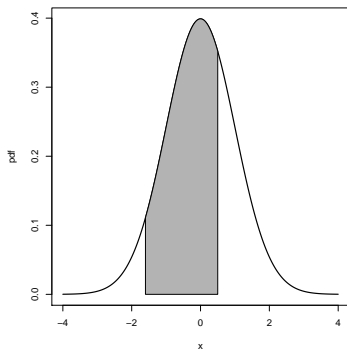
(b) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1.$

(c) $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx, \text{ para } a, b \in \mathbb{R}.$

Entonces $f(x)$ es la **función de densidad** de la **variable aleatoria continua** X .



Sabemos que el área total bajo $f(x)$ es 1, entonces $P(a \leq X \leq b)$ es el área acotada por las rectas $x = a$ y $x = b$.



Variable aleatoria

Para variables aleatorias continuas,

$$P(X = a) = \int_a^a f(t) dt = 0.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} F(x) &= P(X \leq x) = P(X < x) \\ &= \int_{-\infty}^x f(t) dt \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned} P(a \leq X \leq b) &= F(b) - F(a) \\ \frac{dF(x)}{dx} &= f(x) \end{aligned}$$

Evidentemente, también

$$1 = F(+\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$



Ejemplo:

Considere la función,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1, \\ kx^2, & -1 < x \leq 1, \\ 0, & x > 1, \end{cases}$$

Para que $f(x)$ sea una función de densidad, debemos tener que

$$1 = \int_{-1}^1 f(x) dx = k \int_{-1}^1 x^2 dx = k \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^1 = \frac{k}{3} (1^3 - (-1)^3) = \frac{2k}{3}.$$

Es decir, $k = 3/2$.



Ejemplo:

Suponga

$$f(x) = k \exp(-x/2), \quad x > 0.$$

Evidentemente,

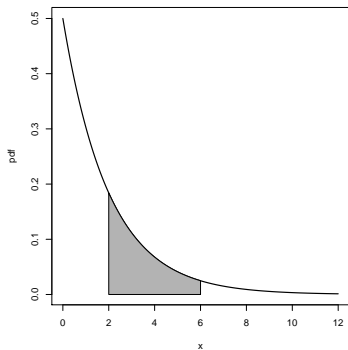
$$\begin{aligned} 1 &= \int_0^{\infty} k \exp(-x/2) dx = k \int_0^{\infty} \exp(-x/2) dx = -2k \exp(-x/2) \Big|_0^{\infty} \\ &= -2k \left[\lim_{z \rightarrow \infty} \exp(-z/2) - \exp(0) \right] = 2k. \end{aligned}$$

De ahí que $k = 1/2$. Luego,

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^0 0 dt + \frac{1}{2} \int_0^x \exp(-t/2) dt \\ &= 1 - \exp(-x/2), \quad x > 0. \end{aligned}$$



Considere $P(2 < X < 6)$, es decir:



De este modo,

$$\begin{aligned}P(2 < X < 6) &= \frac{1}{2} \int_2^6 \exp(-x/2) \, dx = F(6) - F(2) \\ &= [1 - \exp(-3)] - [1 - \exp(-1)] = 0.9502 - 0.6321 \\ &= 0.3181\end{aligned}$$

Adicionalmente,

$$P(X < 8) = F(8) = 1 - \exp(-4) = 0.9817,$$

y

$$P(X \geq 8) = 1 - F(8) = 1 - 0.9817 = 0.0183.$$



Definición 4 (Esperanza):

Sea X variable aleatoria. La **esperanza** (siempre que exista) de X es definida por:

- ▶ Para X discreta

$$E(X) = \sum_{x \in \mathcal{X}} x p(x),$$

- ▶ Si X es continua

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx.$$

En general, tenemos

$$E\{g(X)\} = \sum_{x \in \mathcal{X}} g(x)p(x), \quad E\{g(X)\} = \int_{\mathbb{R}} g(x)f(x) dx.$$



Propiedades:

- (a) $E(a) = a$, para a una constante,
- (b) $E(aX + b) = a E(X) + b$,
- (c) $E(a_1X + a_2Y) = a_1 E(X) + a_2 E(Y)$,
- (d) Si $g(x) \geq 0$, para todo x . Entonces $E\{g(X)\} \geq 0$.
- (e) $E\{g_1(X)\} \leq E\{g_2(X)\}$ si $g_1(X) \leq g_2(X)$.

Demostración:

En efecto, (b) sigue desde

$$\begin{aligned} E(aX + b) &= \int_{-\infty}^{\infty} (ax + b)f(x) dx = a \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx + b \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \\ &= a E(X) + b. \end{aligned}$$

las propiedades restantes se muestran de forma similar (Tarea).



Definición 5 (Varianza):

Sea X variable aleatoria. La **varianza** de X es definida como:

$$\text{var}(X) = E[\{X - E(X)\}^2].$$

Suponga $\mu = E(X)$. Entonces, podemos escribir

$$\text{var}(X) = \sum_{x \in \mathcal{X}} (x - \mu)^2 p(x),$$

para X discreta, y

$$\text{var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx,$$

si X es continua.



Propiedades:

(a) $\text{var}(X) = E(X^2) - E^2(X)$.

(b) $\text{var}(aX + b) = a^2 \text{var}(X)$.

Demostración:

Tenemos

$$(X - E(X))^2 = X^2 - 2X E(X) + E^2(X),$$

de ahí que

$$\text{var}(X) = E[\{X - E(X)\}^2] = E(X^2) - 2E(X)E(X) + E^2(X) = E(X^2) - E^2(X).$$

Ahora, para notar (b), sea $Y = aX + b$ y note que

$$Y - E(Y) = aX + b - aE(X) - b = a(X - E(X)).$$

De este modo,

$$\text{var}(Y) = E[\{Y - E(Y)\}^2] = E[a^2\{X - E(X)\}^2] = a^2 \text{var}(X).$$



Finalmente, podemos definir el r -ésimo momento de X como

$$\mu_r = E(X^r),$$

mientras que el r -ésimo momento centrado, es dado por:

$$\mu'_r = E\{(X - \mu)^r\},$$

con $\mu = \mu_1 = E(X)$.

De este modo es fácil notar que

$$\text{var}(X) = \mu_2 - \mu_1^2.$$



Ejemplo:

Suponga

$$p(x) = \mathbf{P}(X = x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}, \quad x \in \{0, 1, 2, \dots\}.$$

Evidentemente

$$\begin{aligned} \sum_{x=0}^{\infty} p(x) &= \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} \\ &= e^{-\lambda} \left(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^3}{3!} + \dots \right) \\ &= e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1. \end{aligned}$$



Note que

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{\lambda^x}{x!} \\ &= e^{-\lambda} \left(0 + 1 \frac{\lambda}{1!} + 2 \frac{\lambda^2}{2!} + 3 \frac{\lambda^3}{3!} + \dots \right) \\ &= e^{-\lambda} \lambda \left(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^3}{3!} + \dots \right) \\ &= \lambda e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{y=0}^{\infty} \frac{\lambda^y}{y!}, \end{aligned}$$

con $y = x - 1$. De ahí que

$$E(X) = \lambda$$



Resultado 1 (Desigualdad de Chebyshev):

Sea X variable aleatoria y $g(\cdot)$ función no negativa. Entonces, para $k > 0$,

$$P(g(X) \geq k) \leq \frac{E(g(X))}{k}.$$

En particular,

$$P(|X - \mu| \geq r\sigma) = P((X - \mu)^2 \geq r^2\sigma^2) \leq \frac{1}{r^2}, \quad r > 0.$$

o equivalentemente,

$$P(|X - \mu| < r\sigma) \geq 1 - \frac{1}{r^2},$$

donde $\mu = E(X)$ y $\sigma^2 = \text{var}(X)$.



Definición 6 (Función generadora de momentos):

Sea X variable aleatoria con densidad $f(x)$ se define la **función generadora de momentos (MGF)** de X como

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x) dx, \quad |t| < h.$$

Observación:

Es posible probar que

$$\left. \frac{d^r}{dt^r} M_X(t) \right|_{t=0} = E(X^r) = \mu_r$$



Ejemplo:

Considere la densidad

$$f(x) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-bx}, \quad x > 0, a > 0, b > 0,$$

donde $\Gamma(a)$ denota la función Gama.

En efecto, tenemos que

$$\int_0^{\infty} x^{a-1} e^{-bx} dx = \frac{\Gamma(a)}{b^a}.$$

Es decir, $\int_0^{\infty} f(x) dx = 1$.



Tenemos que,

$$\begin{aligned}M_X(t) &= \frac{b^a}{\Gamma(a)} \int_0^\infty e^{tx} x^{a-1} e^{-bx} dx = \frac{b^a}{\Gamma(a)} \int_0^\infty x^{a-1} e^{-(b-t)x} dx \\ &= \frac{b^a}{\Gamma(a)} \frac{\Gamma(a)}{(b-t)^a} = \left(\frac{b}{b-t}\right)^a = \left(\frac{1}{1-t/b}\right)^a = \left(1 - \frac{t}{b}\right)^{-a},\end{aligned}$$

para $t < b$. De este modo,

$$\frac{d}{dt} \left(1 - \frac{t}{b}\right)^{-a} = -a \left(1 - \frac{t}{b}\right)^{-a-1} \frac{d}{dt} \left(1 - \frac{t}{b}\right) = \frac{a}{b} \left(1 - \frac{t}{b}\right)^{-(a+1)}.$$

Es decir,

$$E(X) = \frac{d}{dt} M_X(t) \Big|_{t=0} = \frac{a}{b} \left(1 - \frac{t}{b}\right)^{-(a+1)} \Big|_{t=0} = \frac{a}{b}.$$

Tarea:

Obtener $E(X^2)$ y de ahí que $\text{var}(X) = E(X^2) - E^2(X)$.

