

MAT-042: Modelos de probabilidad discretos y continuos de uso común

Felipe Osorio

fosorios.mat.utfsm.cl

Departamento de Matemática, UTFSM



Definición 1 (Distribución uniforme discreta):

Considere X con función de probabilidad

$$p(x; N) = \frac{1}{N}, \quad x \in \{1, 2, \dots, N\},$$

donde $N \in \mathbb{N}$. En cuyo caso escribimos $X \sim U\{1, \dots, N\}$.

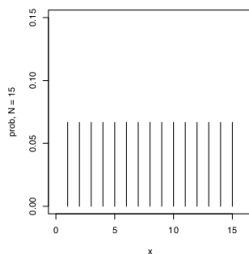
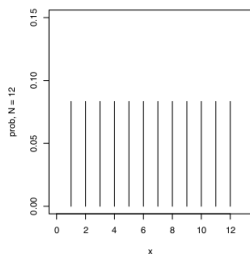
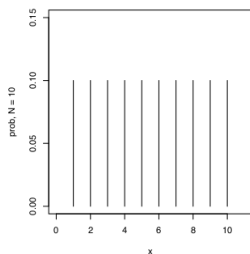
Resultado 1:

Si $X \sim U\{1, \dots, N\}$. Entonces

$$E(X) = \frac{N+1}{2}, \quad \text{var}(X) = \frac{N^2-1}{12}.$$



Distribución uniforme discreta



$X \sim U\{1, \dots, N\}$ con $N = 10, 12$ y 15 .

Distribución uniforme discreta

Demostración:

En efecto,

$$E(X) = \sum_{k=1}^N k \frac{1}{N} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N k = \frac{1}{N} \frac{N(N+1)}{2}$$

mientras que

$$\begin{aligned} \text{var}(X) &= E(X^2) - E^2(X) = \sum_{k=1}^N k^2 \frac{1}{N} - \left(\frac{N+1}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{N} \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} - \left(\frac{N+1}{2}\right)^2 \\ &= \frac{N+1}{2} \left(\frac{2N+1}{3} - \frac{N+1}{2}\right) = \frac{(N+1)(N-1)}{12} \\ &= \frac{N^2 - 1}{12}. \end{aligned}$$



Definición 2 (Distribución Bernoulli):

Una variable aleatoria X dice tener **distribución Bernoulli** si su función de probabilidad es dada por

$$p(x; \theta) = \theta^x (1 - \theta)^{1-x}, \quad x = \{0, 1\},$$

y $\theta \in [0, 1]$. En cuyo caso escribimos $X \sim \text{Ber}(\theta)$.

Resultado 2:

Si $X \sim \text{Ber}(\theta)$. Entonces

$$E(X) = \theta, \quad \text{var}(X) = \theta(1 - \theta), \quad M_X(t) = \theta e^t + (1 - \theta)$$



Demostración:

Tenemos

$$E(X) = 0 \cdot (1 - \theta) + 1 \cdot \theta = \theta.$$

$$\begin{aligned} \text{var}(X) &= E(X^2) - E^2(X) = 0^2 \cdot (1 - \theta) + 1^2 \cdot \theta - \theta^2 \\ &= \theta(1 - \theta). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_X(t) &= E(e^{tX}) = e^{t \cdot 0}(1 - \theta) + e^{t \cdot 1}\theta \\ &= (1 - \theta) + e^t\theta. \end{aligned}$$



Definición 3 (Distribución binomial):

Una variable aleatoria X tiene **distribución binomial** si su función de probabilidad es dada por:

$$p(x; n, \theta) = \binom{n}{x} \theta^x (1 - \theta)^{n-x}, \quad x \in \{0, 1, \dots, n\},$$

y escribimos $X \sim \text{Bin}(n, \theta)$ con $n \in \mathbb{N}$, $\theta \in [0, 1]$ y

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}.$$

En particular, si $n = 1$ entonces $X \sim \text{Ber}(\theta)$.

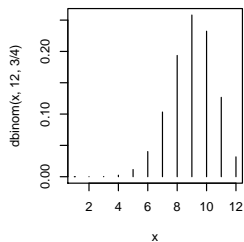
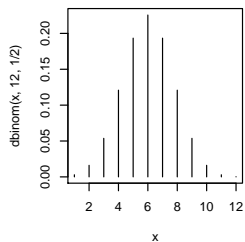
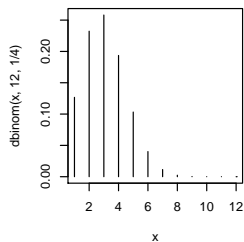
Resultado 3:

Si $X \sim \text{Bin}(n, \theta)$. Entonces

$$E(X) = n\theta, \quad \text{var}(X) = n\theta(1 - \theta), \quad M_X(t) = (\theta e^t + (1 - \theta))^n$$



Distribución binomial



$X \sim \text{Bin}(n, \theta)$ con $n = 12$ y $\theta = 1/4, 1/2, 3/4$.

Demostración:

Note que

$$\begin{aligned}M_X(t) &= \mathbb{E}(e^{tX}) = \sum_{x=0}^n e^{tx} \binom{n}{x} \theta^x (1-\theta)^{n-x} \\ &= \sum_{x=0}^n \binom{n}{x} (\theta e^t)^x (1-\theta)^{n-x} \\ &= (\theta e^t + (1-\theta))^n.\end{aligned}$$

mientras que $\mathbb{E}(X)$ y $\text{var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}^2(X)$ son obtenidos por diferenciación, como

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= M'_X(t)|_{t=0} = \frac{d}{dt} (\theta e^t + (1-\theta))^n \Big|_{t=0}, \\ \mathbb{E}(X^2) &= M''_X(t)|_{t=0} = \frac{d^2}{dt^2} (\theta e^t + (1-\theta))^n \Big|_{t=0}.\end{aligned}$$



Definición 4 (Distribución Poisson):

Se dice que una variable aleatoria X tiene **distribución Poisson** si su función de probabilidad asume la forma:

$$p(x; \lambda) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}, \quad x \in \{0, 1, \dots\},$$

en cuyo caso denotamos $X \sim \text{Poi}(\lambda)$ con $\lambda > 0$.

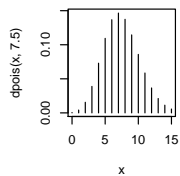
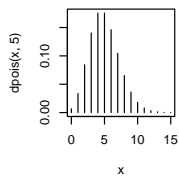
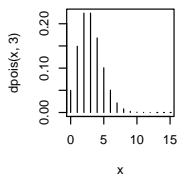
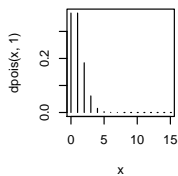
Resultado 4:

Si $X \sim \text{Poi}(\lambda)$. Entonces

$$E(X) = \lambda, \quad \text{var}(X) = \lambda, \quad M_X(t) = \exp\{\lambda(e^t - 1)\}.$$



Distribución Poisson



$X \sim \text{Poi}(\lambda)$ con $\lambda = 1, 3, 5, 7.5$.

Demostración:

En efecto,

$$\begin{aligned}M_X(t) &= \mathbf{E}(e^{tX}) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{tx} e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} \\&= \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} (\lambda e^t)^x}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^t)^x}{x!} \\&= e^{-\lambda} e^{\lambda e^t}.\end{aligned}$$

De este modo,

$$M'_X(t) = \lambda e^t e^{-\lambda} e^{\lambda e^t}, \quad M''_X(t) = \lambda e^t e^{-\lambda} e^{\lambda e^t} (\lambda e^t + 1),$$

de donde sigue que

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(X) &= M'_X(0) = \lambda, \\ \text{var}(X) &= M''_X(0) - \{M'_X(0)\}^2 = \lambda(\lambda + 1) - \lambda^2 = \lambda.\end{aligned}$$



Definición 5 (Distribución uniforme):

Si la función de densidad de una variable aleatoria X es dada por:

$$f(x; a, b) = \frac{1}{b-a} I_{(a,b)}(x),$$

donde a y b satisfacen $-\infty < a < b < \infty$. Entonces escribimos $X \sim U(a, b)$. Además

$$F(x) = \frac{x-a}{b-a}, \quad x \in (a, b).$$

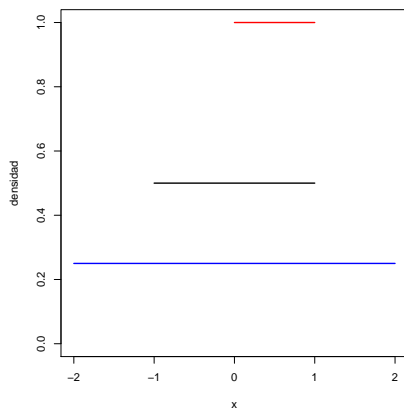
Resultado 5:

Si $X \sim U(a, b)$. Entonces

$$E(X) = \frac{a+b}{2}, \quad \text{var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}, \quad M_X(t) = \frac{e^{bt} - e^{at}}{(b-a)t}.$$



Distribución uniforme



$X \sim U(-1, 1)$ (negro), $X \sim U(0, 1)$ (rojo), $X \sim U(-2, 2)$ (azul).



Demostración:

Note que

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \frac{x^2}{2} \Big|_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)} \\ &= \frac{a+b}{2} \end{aligned}$$

mientras que

$$\begin{aligned} \text{var}(X) &= E(X^2) - E^2(X) = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a} dx - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \\ &= \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} - \frac{(a+b)^2}{4} \\ &= \frac{(b-a)(b^2 + ab + a^2)}{3(b-a)} - \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} \\ &= \frac{1}{12} (4(b^2 + ab + a^2) - 3(a^2 + 2ab + b^2)) \\ &= \frac{1}{12} (a^2 - 2ab + b^2) = \frac{(a-b)^2}{12}. \end{aligned}$$



Definición 6 (Distribución normal):

Se dice que una variable aleatoria X es **normalmente distribuida** si su densidad es dada por:

$$f(x; \mu, \sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{y - \mu}{\sigma}\right)^2\right\}$$

donde $\mu \in \mathbb{R}$ y $\sigma^2 > 0$ y anotamos $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Un caso particular importante corresponde a la **distribución normal estándar**, esto es $Z \sim N(0, 1)$ tal que

$$\phi(z) = (2\pi)^{-1/2} \exp(-\frac{1}{2}z^2), \quad \Phi(z) = \int_{-\infty}^z \phi(u) du.$$

Si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, entonces

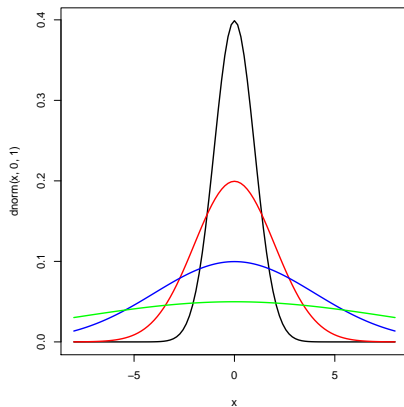
$$E(X) = \mu, \quad \text{var}(X) = \sigma^2, \quad M_X(t) = \exp(\mu t + \sigma^2 t^2 / 2).$$

Además, para $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, tenemos

$$P(a < X < b) = \Phi\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right).$$



Distribución normal



$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ con $\mu = 0$ y $\sigma^2 = 1$ (negro), 2 (rojo), 4 (azul) y 8 (verde).



Definición 7 (Distribución Gama):

Si la variable aleatoria X tiene densidad dada por:

$$f(x; a, b) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} \exp(-bx), \quad x > 0,$$

con $a > 0$ y $b > 0$, entonces X tiene **distribución Gama** y anotamos $X \sim \text{Gama}(a, b)$.
Aquí

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} u^{z-1} e^{-u} du,$$

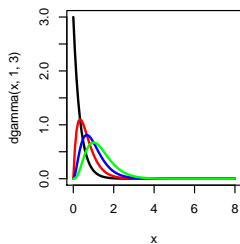
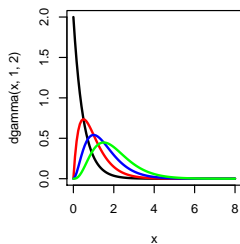
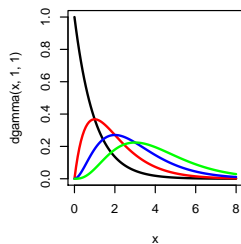
denota la función gama.

Cuando $a = 1$ obtenemos que $X \sim \text{Exp}(b)$ con función de densidad

$$f(x; b) = b e^{-bx} I_{(0, \infty)}(x).$$



Distribución Gama



$X \sim \text{Gama}(a, b)$ con $a = 1$ (negro), 2 (rojo), 3 (azul), 4 (verde), y $b = 1, 2, 3$.



Resultado 6:

Si $X \sim \text{Gama}(a, b)$. Entonces

$$E(X) = \frac{a}{b}, \quad \text{var}(X) = \frac{a}{b^2}, \quad M_X(t) = \left(1 - \frac{t}{b}\right)^{-a},$$

para $t < b$.

Demostración:

Considere

$$\begin{aligned} M_X(t) &= E(e^{tX}) = \int_0^{\infty} \frac{b^a}{\Gamma(a)} e^{tx} x^{a-1} e^{-bx} dx, \\ &= \frac{b^a}{\Gamma(a)} \int_0^{\infty} x^{a-1} e^{-(b-t)x} dx, \\ &= \frac{b^a}{\Gamma(a)} \frac{\Gamma(a)}{(b-t)^a} = \left(\frac{b}{b-t}\right)^a, \end{aligned}$$

con $t < b$. Desde donde obtenemos $E(X)$ y $\text{var}(X)$ por diferenciación.



Definición 8 (Distribución Beta):

Si una variable aleatoria X tiene densidad dada por

$$f(x) = \frac{1}{B(a, b)} x^{a-1} (1-x)^{b-1}, \quad x \in (0, 1),$$

donde $a > 0$ y $b > 0$, entonces X tiene **distribución Beta** y anotamos $X \sim \text{Beta}(a, b)$.

Observación:

La función

$$B(a, b) = \int_0^1 z^{a-1} (1-z)^{b-1} dz,$$

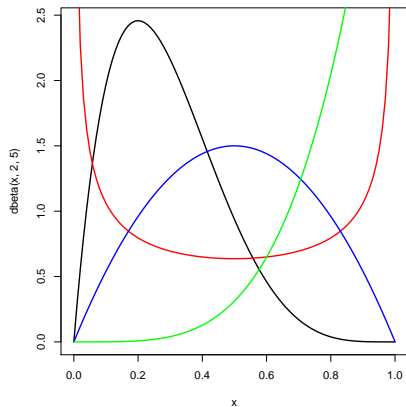
es conocida como la función beta. Además,

$$B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

Por otro lado, cuando $a = b = 1$, obtenemos la distribución $U(0, 1)$.



Distribución Beta



$X \sim \text{Beta}(a, b)$ con $(a, b) = (2, 5)$ (negro), $(0.5, 0.5)$ (rojo), $(2, 2)$ (azul) y $(5, 1)$ (verde).



Observación:

La función generadora de momentos para la distribución Beta **no tiene una forma simple**.

Resultado 7:

Si $X \sim \text{Beta}(a, b)$. Entonces

$$E(X) = \frac{a}{a+b}, \quad \text{var}(X) = \frac{ab}{(a+b+1)(a+b)^2}.$$



Demostración:

Considere

$$\begin{aligned} E(X^k) &= \frac{1}{B(a, b)} \int_0^1 x^k x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx \\ &= \frac{1}{B(a, b)} \int_0^1 x^{(a+k)-1} (1-x)^{b-1} dx \\ &= \frac{B(a+k, b)}{B(a, b)} = \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma a} \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a+b+k)} \end{aligned}$$

Substituyendo por $k = 1$ y $k = 2$ obtenemos $E(X)$ y $E(X^2)$ desde donde sigue el resultado.



Algunas distribuciones disponibles en R¹

- ▶ beta
- ▶ binomial
- ▶ binomial negativa
- ▶ chi-cuadrado
- ▶ exponencial
- ▶ F
- ▶ gama
- ▶ geométrica
- ▶ hipergeométrica
- ▶ logística
- ▶ log-normal
- ▶ normal
- ▶ Poisson
- ▶ *t* de Student
- ▶ uniforme
- ▶ Weibull

¹Hay muchas otras distribuciones disponibles en paquetes específicos.



- ▶ `ddist(x, parametros)` es la función de densidad de `dist` evaluado en x .
- ▶ `pdist(x, parametros)` calcula $P(X \leq x)$ para X dado por `dist`.
- ▶ `qdist(p, parametros)` retorna x satisfaciendo $P(X \leq x) = p$, el p -ésimo cuantil, con X dado por `dist`.
- ▶ `rdist(n, parametros)` genera n dígitos pseudo-aleatorios desde la distribución especificada por `dist`.

