MAT-032: Cálculo de probabilidades

Felipe Osorio

fosorios.mat.utfsm.cl

Departamento de Matemática, UTFSM

Definición 1 (Espacio muestral):

El conjunto Ω, de todos los resultados posibles de un experimento, es llamado espacio muestral para el experimento.

Ejemplos:

- Lanzar una moneda, en cuyo caso tenemos sólo 2 resultados posibles

$$\Omega = \{\text{Cara}, \text{Sello}\}$$

- Notas de MAT021 para un grupo de estudiantes escogidos al azar

$$\Omega = \{0, 1, \ldots, 99, 100\}$$

- Vida útil de un artículo y se determina su tiempo de duración

$$\Omega = [0, \infty)$$

Definición 2 (Evento):

Un evento (suceso) es cualquier colección de resultados posibles del experimento, esto es, cualquier subconjunto de Ω.[1]

Observación:

Sea $A \subseteq \Omega$ diremos que A ocurre si $\omega \in A$ con $\omega \in \Omega$ es un resultado asociado a un experimento.

[1] incluyendo el propio Ω

Operaciones sobre conjuntos

Inclusión e igualdad:

La inclusión e igualdad entre conjuntos se definen como:

$$A \subset B \Longleftrightarrow x \in A \Rightarrow x \in B, \qquad A = B \Longleftrightarrow A \subset B \text{ y } B \subset A.$$

Unión:

La unión entre A y B denotada por $A \cup B$ es definida como

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ o } x \in B\}.$$

Intersección:

La intersección entre A y B escrita como $A \cap B$ se define como

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ y } x \in B\}.$$

Complemento:

El complemento de A, escrito como A^c es el conjunto de todos los elementos que no están en A

$$A^c = \{x : x \notin A\}.$$

Propiedades:

(a) $A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A.$

(b) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C,$
$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$

(c) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(d) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, \quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ (Leyes de De Morgan).

Las operaciones anteriores de unión e intersección se pueden extender a colecciones infinitas de conjuntos

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \{x \in \subset : x \in A_i \text{ para algún } i\},$$
$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \{x \in \subset : x \in A_i \text{ para todo } i\}.$$

Definición 3:

Dos eventos A y B son disjuntos (excluyentes) si:

$$A \cap B = \varnothing$$

Los eventos $A_1, A_2, \ldots$ son disjuntos por pares[2] si

$$A_i \cap A_j = \varnothing, \quad \text{si } i \neq j.$$

Definición 4:

Si $A_1, A_2, \ldots$ son disjuntos por pares y $\cup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega$, entonces la colección se llama una partición de Ω.

Ejemplos:

- Los conjuntos $A_i = [i, i+1)$, $i = 0, 1, 2, \ldots$ forman una partición de $[0, \infty)$.
- $\Omega = A \cup A^c$ es partición.

[2] o mutuamente excluyentes

Para todo $A \subset \Omega$, deseamos asociar un número entre 0 y 1, llamado probabilidad de A.

Definición 5:

Una colección de subconjuntos de Ω es llamado σ-álgebra denotada por $\mathcal{A}$ si satisface las propiedades

(a) $\varnothing \in \mathcal{A}$.

(b) Si $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$.

(c) Si $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{A} \Rightarrow \cup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$.

Observación

Note que $\varnothing \subset \Omega$ y $\Omega = \varnothing^c$, así por (a) y (b), sigue que $\Omega \in \mathcal{A}$.

Además, si $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$, entonces $A_1^c, A_2^c, \dots \in \mathcal{A}$ y de este modo

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c \in \mathcal{A},$$

por las leyes de De Morgan, tenemos

$$\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c\right)^c = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}.$$

Observación

Asociado al espacio muestral Ω puede haber muchas σ-álgebras. Por ejemplo, la colección $\{\varnothing, \Omega\}$ es σ-álgebra (minimal).

Definición 6 (Probabilidad):

Dado un espacio muestral Ω y una σ-álgebra asociada $\mathcal{A}$, una función de probabilidad $\mathsf{P} : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ satisface:

(a) $\mathsf{P}(A) \geq 0$, para todo $A \in \mathcal{A}$.

(b) $\mathsf{P}(\Omega) = 1$

(c) Si $A_1, A_2, \ldots$ son disjuntos por pares, entonces

$$\mathsf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathsf{P}(A_i).$$

Observación:

La terna $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ se denomina espacio de probabilidad.

Resultado 1:

Si P es una función de probabilidad y A es cualquier conjunto en $\mathcal{A}$. Entonces,

(a) $\mathsf{P}(\varnothing) = 0$, donde $\varnothing$ es el conjunto vacío.

(b) $\mathsf{P}(A) \leq 1$.

(c) $\mathsf{P}(A^c) = 1 - \mathsf{P}(A)$.

Resultado 2:

Si P es una función de probabilidad y $A, B \in \mathcal{A}$. Entonces,

(a) $\mathsf{P}(B \cap A^c) = \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(A \cap B)$.

(b) $\mathsf{P}(A \cup B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(A \cap B)$.

(c) Si $A \subseteq B \Rightarrow \mathsf{P}(A) \leq \mathsf{P}(B)$.

Resultado 3:

Si P es función de probabilidad. Entonces,

(a) $\mathsf{P}(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathsf{P}(A \cap C_i)$ para cualquier partición $C_1, C_2, \ldots$.

(b) $\mathsf{P}\left(\cup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathsf{P}(A_i)$ para conjuntos $A_1, A_2, \ldots$ cualquiera.[3]

Observación:

Usando la desigualdad de Boole, tenemos

$$\mathsf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i^c\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(A_i^c).$$

[3] desigualdad de Boole

Principio de multiplicación:

Suponga que un experimento consta de 2 etapas, y que la 1ra se realiza en n_1 maneras, mientras que la 2da en n_2 maneras. Es decir, el experimento se puede desarrollar en

$$n_1 \cdot n_2 \text{ maneras.}$$

Observación:

Esto puede extenderse a experimentos con k etapas. De este modo, el experimento se puede desarrollar de

$$n_1 \cdot n_2 \cdots n_k = \prod_{i=1}^{k} n_i,$$

maneras.

Principio de adición:

Suponga que un experimento consta de 2 etapas, y que la 1ra se realiza en n_1 maneras, mientras que la 2da en n_2 maneras. Además, suponga que ambas etapas no se pueden desarrollar juntas. Entonces, el experimento se puede desarrollar en

$$n_1 + n_2 \text{ maneras.}$$

Observación:

Esto puede extenderse a k etapas. En cuyo caso tenemos

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_k = \sum_{i=1}^{k} n_i,$$

maneras para desarrollar el experimento.

Suponga el conjunto $A = \{a, b, c\}$. Deseamos conocer el número de permutaciones de los 3 elementos de A. Podemos notar que

$$a\,b\,c, \quad a\,c\,b, \quad b\,a\,c, \quad b\,c\,a, \quad c\,a\,b, \quad c\,b\,a,$$

es decir, tenemos 6 permutaciones.

Definición 7 (Permutaciones):

Sea $A \neq \varnothing$ un conjunto finito tal que $\#(A) = n$. Se denomina permutación a todo subconjunto de k elementos (distinguiendo el orden) que se pueden formar desde los n objetos. De este modo, el número total de permutaciones es:

$$p_{nk} = n(n-1)\cdots(n-k+1).$$

Observación:

El número total de permutaciones de un conjunto con n objetos es

$$p_{nn} = n(n-1)\cdots 2 \cdot 1.$$

Escribimos por simplicidad $p_{nn} = p_n$ y podemos notar que $p_n = np_{n-1}$.

Observación:

p_n es llamado n factorial y es dado por:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n = \prod_{k=1}^{n} k.$$

Además,[4]

$$n! = (n-1)!\, n, \qquad 0! = 1.$$

Por otro lado, podemos escribir

$$p_{nk} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

[4] para n no entero podemos hacer $n! = \Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$.

Considere $A = \{a, b, c, d\}$ y suponga que deseamos todas las combinaciones de 2 elementos desde el conjunto A. De este modo,

$$a\,b \quad a\,c, \quad a\,d, \quad b\,c, \quad b\,d, \quad c\,d,$$

es decir, tenemos 6 combinaciones.[5]

Definición 8 (Combinaciones):

Sea $A \neq \varnothing$ conjunto finito tal que $\#(A) = n$. Llamamos combinación de k elementos a todo conjunto *diferente* de k elementos tomado desde n. De esta manera el número de combinaciones es

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 1} = \frac{p_{nk}}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

[5] $a\,b$ y $b\,a$ sólo difieren en el orden.

Técnicas de conteo (Análisis combinatorio)

Propiedades:

(a) Condición de simetría:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

(b) Fórmula para adición

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}, \qquad k \text{ entero.}$$

(c) Fórmulas para sumatorias

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{m} = \binom{0}{m} + \binom{1}{m} + \cdots + \binom{n}{m} = \binom{n+1}{m+1}.$$

(d) Teorema del binomio

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Suponga

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k\}.$$

Deseamos caracterizar $\mathsf{P}(A)$ para eventos elementales. Es decir, $A = \{\omega_i\}$ y consideramos

$$p_i = \mathsf{P}(\{\omega_i\}), \qquad i = 1, \dots, k.$$

De este modo,

(a) $p_i \geq 0$, para $i = 1, \dots, k$.

(b) $p_1 + p_2 + \cdots + p_k = 1$.

Suponga que cada $\{\omega_i\}$ es igualmente probable. Entonces

$$p_i = \mathsf{P}(\{\omega_i\}) = \frac{1}{k}.$$

Luego, para un evento

$$A = \{\omega_{j_1}, \dots, \omega_{j_r}\},$$

sigue que

$$\mathsf{P}(A) = \frac{r}{k},$$

o bien

$$\mathsf{P}(A) = \frac{\#(A)}{\#(\Omega)}.$$

Observación:

Esta **no** es una definición general de probabilidad, sino apropiada **sólo** para nuestro contexto.

Ejemplo (problema del cumpleaños):

Suponga un grupo de k personas. Se desea calcular la probabilidad de que 2 personas cumplan años el mismo día. Entonces tenemos

$$\frac{p_{365,k}}{365^k} = \frac{365 \cdot 364 \cdots (365-k+1)}{365^k},$$

y por la regla del complemento

$$\mathrm{P}(\{\text{al menos un par de personas cumplan el mismo día}\}) = 1 - \frac{p_{365,k}}{365^k}.$$

Por ejemplo,

k	10	20	22	50
Prob.	0.117	0.411	0.476	0.970