

MAT-032: Probabilidad condicional, teorema de Bayes e independencia

Felipe Osorio

fosorios.mat.utfsm.cl

Departamento de Matemática, UTFSM



Ejemplo:

Considere un lote con 80 artículos sin defectos y 20 defectuosos. Suponga que se selecciona 2 artículos. (a) con sustitución y (b) sin sustitución. Defina los eventos

$A = \{\text{el 1er artículo es defectuoso}\},$

$B = \{\text{el 2do artículo es defectuoso}\}.$

Cuando escogemos **con** sustitución, tenemos

$$P(A) = P(B) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}.$$

Cuando escogemos **sin** sustitución, tenemos

$$P(A) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5},$$

pero, ¿Cambia $P(B)$?



Definición 1 (Probabilidad condicional):

Si A y B son dos eventos en Ω y $P(B) > 0$, entonces la **probabilidad condicional** de A dado B , escrito como $P(A|B)$ es dada por:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Observación:

Note que $P(B|B) = 1$ es decir, B “actúa” como Ω . En efecto, note que $A = A \cap \Omega$, así

$$P(A) = P(A|\Omega) = \frac{P(A \cap \Omega)}{P(\Omega)}.$$



Ocurrencias son **calibradas** con relación a B . En particular, si $A \cap B = \emptyset$, entonces

$$P(A|B) = P(B|A) = 0$$

En el ejemplo anterior, se desea calcular $P(B|A) = \frac{19}{99}$, pues si A ya ha ocurrido sólo quedan 19 defectuosos entre los 99 artículos.

Reexpresando la probabilidad condicional tenemos

$$P(A \cap B) = P(A|B) P(B),$$

o bien

$$P(A \cap B) = P(B|A) P(A).$$

Estas expresiones permiten “contornar” cálculos complicados, por ejemplo¹

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) P(A)}{P(B)}.$$

¹Este es un caso particular del Teorema de Bayes.

Ocurrencias son **calibradas** con relación a B . En particular, si $A \cap B = \emptyset$, entonces

$$P(A|B) = P(B|A) = 0$$

En el ejemplo anterior, se desea calcular $P(B|A) = \frac{19}{99}$, pues si A ya ha ocurrido sólo quedan 19 defectuosos entre los 99 artículos.

Reexpresando la probabilidad condicional tenemos

$$P(A \cap B) = P(A|B) P(B),$$

o bien

$$P(A \cap B) = P(B|A) P(A).$$

Estas expresiones permiten “contornar” **cálculos complicados**, por ejemplo¹

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) P(A)}{P(B)}.$$

¹Este es un caso particular del **Teorema de Bayes**.

Observación:

El espacio de probabilidad definido por $\mathcal{A} \cap B$ permite notar que $P(A|B)$ es una **probabilidad**. Es decir, satisface:

- (a) $P(A|B) \geq 0$.
- (b) $P(\Omega|B) = 1$.
- (c) Para $\{A_n\}_{n \geq 1}$ sucesión disjunta

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n|B\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n|B).$$



Resultado 1 (Teorema de probabilidad total):

Sea (Ω, \mathcal{A}, P) un espacio de probabilidad y sea C_1, C_2, \dots , una partición contable de Ω , tal que $P(C_i) \geq 0, \forall i$. Entonces, para todo $A \in \mathcal{A}$

$$P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A|C_i) P(C_i).$$

Demostración:

Como los C_i 's forman una partición, tenemos que

$$A = A \cap \Omega = A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i \right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A \cap C_i),$$

además

$$P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A \cap C_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A|C_i) P(C_i).$$



Resultado 1 (Teorema de probabilidad total):

Sea (Ω, \mathcal{A}, P) un espacio de probabilidad y sea C_1, C_2, \dots , una partición contable de Ω , tal que $P(C_i) \geq 0, \forall i$. Entonces, para todo $A \in \mathcal{A}$

$$P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A|C_i) P(C_i).$$

Demostración:

Como los C_i 's forman una partición, tenemos que

$$A = A \cap \Omega = A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i \right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A \cap C_i),$$

además

$$P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A \cap C_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A|C_i) P(C_i).$$



Resultado 2 (Teorema de Bayes):

Sea (Ω, \mathcal{A}, P) un espacio de probabilidad y sea $\{C_i\}$ partici3n contable de Ω , con $P(C_i) \geq 0, \forall i$. Entonces, para todo $A \in \mathcal{A}$, tenemos que

$$P(C_i|A) = \frac{P(A|C_i) P(C_i)}{\sum_{i=1}^{\infty} P(A|C_i) P(C_i)}, \quad P(A) > 0.$$



Demostración:

Tenemos que

$$P(C_i|A) P(A) = P(A|C_i) P(C_i),$$

así

$$P(C_i|A) = \frac{P(A|C_i) P(C_i)}{P(A)}, \quad P(A) > 0.$$

Por el **Teorema de Probabilidad total**, sigue que

$$P(C_i|A) = \frac{P(A|C_i) P(C_i)}{\sum_{i=1}^{\infty} P(A|C_i) P(C_i)}.$$



Ejemplo:

Considere el lote de 20 artículos defectuosos y 80 sin defectos, desde los que se escoge 2 artículos sin reemplazo. Sea,

$A = \{\text{el 1er artículo es defectuoso}\},$

$B = \{\text{el 2do artículo es defectuoso}\}.$

Para calcular, $P(B)$ podemos hacer²

$$\begin{aligned}P(B) &= P(B|A) P(A) + P(B|A^c) P(A^c) \\&= \frac{19}{99} \cdot \frac{1}{5} + \frac{20}{99} \cdot \frac{4}{5} \\&= \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{99} (19 + 20 \cdot 4) = \frac{1}{5}\end{aligned}$$

²Compare este resultado al **con** sustitución.

Definición 2 (Independencia):

Sea (Ω, \mathcal{A}, P) un espacio de probabilidad y sean $A, B \in \mathcal{A}$. Se dice que A y B son **independientes**, si y sólo si

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Observación:

Podemos entender la independencia como: *la ocurrencia de un evento B no tiene efecto en la probabilidad de otro evento A* . Es decir

$$P(A|B) = P(A).$$

Note también que

$$P(B|A) = \frac{P(A|B) P(B)}{P(A)} = \frac{P(A) P(B)}{P(A)} = P(B),$$

es decir la ocurrencia de A **no** tiene efecto en la probabilidad de B .



Definición 2 (Independencia):

Sea (Ω, \mathcal{A}, P) un espacio de probabilidad y sean $A, B \in \mathcal{A}$. Se dice que A y B son **independientes**, si y sólo si

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Observación:

Podemos entender la independencia como: *la ocurrencia de un evento B **no tiene efecto** en la probabilidad de otro evento A* . Es decir

$$P(A|B) = P(A).$$

Note también que

$$P(B|A) = \frac{P(A|B) P(B)}{P(A)} = \frac{P(A) P(B)}{P(A)} = P(B),$$

es decir la ocurrencia de A **no** tiene efecto en la probabilidad de B .



Resultado 3:

Si A y B son independientes, entonces también son independientes:

- (a) A y B^c .
- (b) A^c y B .
- (c) A^c y B^c .

Demostración: (solamente parte (a))

Para probar (a),³ note que

$$\begin{aligned}P(A \cap B^c) &= P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A)P(B) \\ &= P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(B^c).\end{aligned}$$

³Parte (b) y (c): **Tarea.**



Resultado 4:

Una colección de eventos A_1, \dots, A_n es **mutuamente independiente**, si para cualquier subcolección A_{i_1}, \dots, A_{i_k} , tenemos

$$P\left(\bigcap_{j=1}^k A_{i_j}\right) = \prod_{j=1}^k P(A_{i_j}).$$



Ejemplo:

Se lanzan 3 dados de distinto color: blanco, rojo y negro ¿Cuál es la probabilidad de que el dado blanco salga 3, y los otros dos no?

Sean A, B y C

$A = \{\text{el resultado del dado blanco es } 3\}$,

$B = \{\text{el resultado del dado rojo es } 3\}$,

$C = \{\text{el resultado del dado negro es } 3\}$.

Tenemos $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{6}$ y se pide calcular

$$P(A \cap B^c \cap C^c) = P(A) P(B^c) P(C^c) = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{216}.$$



Ejercicio:

En 28 tarjetas se escriben las 28 letras del abecedario. Se eligen sucesivamente, **sin reemplazo**, cuatro tarjetas al azar. Calcule la probabilidad de que:

- (a) Se obtenga **en orden** la palabra "DATO".
- (b) Se **pueda escribir** con las cuatro letras la palabra "DATO".



Solución:

(a) Es claro que,

$$\begin{aligned}P(D.A.T.O) &= P(D) P(A|D) P(T|D \cap A) P(O|D \cap A \cap T) \\ &= \frac{1}{28} \cdot \frac{1}{27} \cdot \frac{1}{26} \cdot \frac{1}{25} = \frac{24!}{28!}\end{aligned}$$

(b) Podemos **reordenar** las 4 letras obtenidas, es decir

$$p = 4! \frac{24!}{28!} = \frac{1}{\frac{28!}{4! 24!}} = \frac{1}{\binom{28}{4}}.$$

Observación:

Este resultado se puede **generalizar** para palabras $k < 28$ letras distintas

$$(a) \quad p = \frac{(28 - k)!}{28!}, \quad (b) \quad p = \frac{1}{\binom{28}{k}}.$$



Solución:

(a) Es claro que,

$$\begin{aligned} P(D.A.T.O) &= P(D) P(A|D) P(T|D \cap A) P(O|D \cap A \cap T) \\ &= \frac{1}{28} \cdot \frac{1}{27} \cdot \frac{1}{26} \cdot \frac{1}{25} = \frac{24!}{28!} \end{aligned}$$

(b) Podemos **reordenar** las 4 letras obtenidas, es decir

$$p = 4! \frac{24!}{28!} = \frac{1}{\frac{28!}{4! 24!}} = \frac{1}{\binom{28}{4}}.$$

Observación:

Este resultado se puede **generalizar** para palabras $k < 28$ letras distintas

$$(a) \quad p = \frac{(28 - k)!}{28!}, \quad (b) \quad p = \frac{1}{\binom{28}{k}}.$$

