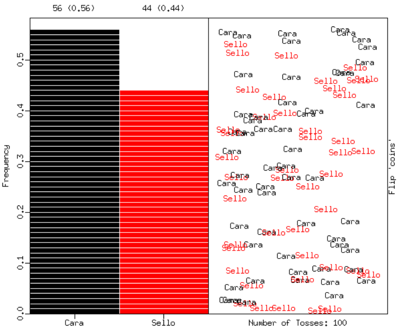
MAT-032: Variable aleatoria

Felipe Osorio

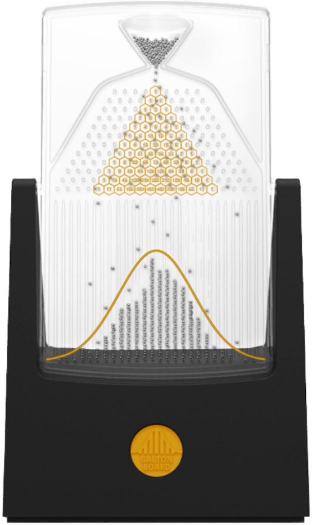
fosorios.mat.utfsm.cl

Departamento de Matemática, UTFSM

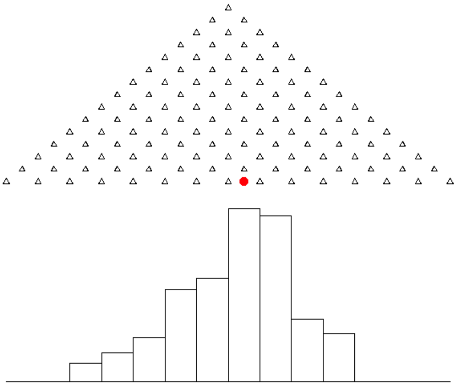
Lanzamiento de una moneda



Máquina de Galton



Máquina de Galton



Definición 1 (variable aleatoria):

Una variable aleatoria X en $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ es una función real definida en Ω tal que $\{X \leq x\}$ es un evento aleatorio $(x \in \mathbb{R})$. Es decir

$$X : \Omega \to \mathbb{R},$$

es variable aleatoria si $\{X \leq x\} \in \mathcal{A}$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Notación:

Diremos que $X(\omega)$ es variable aleatoria si

$$(X \leq x) \stackrel{\text{def}}{=} \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A},$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Definición 2 (distribución de probabilidad):

X es variable aleatoria discreta si adopta valores en un conjunto finito o numerable $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, \dots\}$. En este caso se define la función de probabilidad

$$p(x_i) = \mathsf{P}(X = x_i), \qquad i = 1, 2 \dots$$

siempre que satisfaga las propiedades:

(a) $p(x) \geq 0$, para todo $x \in \mathcal{X}$.

(b) $\displaystyle\sum_{x_i \in \mathcal{X}} p(x_i) = 1.$

Definición 3 (distribución acumulada):

La función de distribución acumulada (CDF) de X denotada por F_X es definida por

$$F_X(x) = \mathsf{P}(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p(x_i).$$

Observación:

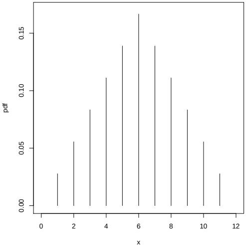
Evidentemente, tenemos que:

$$F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1].$$

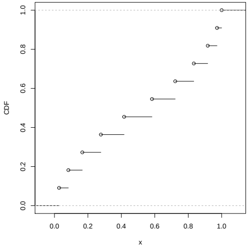
Ejemplo (lanzamiento de dos dados):

Considere el lanzamiento de 2 dados. Sea X la suma de sus caras. Entonces,

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathsf{P}(X = x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$



(a) $p(x)$



(b) CDF

Propiedades:

- $x \leq y \Rightarrow F(x) \leq F(y)$ (es no decreciente).
- F es continua a la derecha.
- $F(-\infty) = 0$ y $F(+\infty) = 1$. $\quad (0 \leq F(x) \leq 1)$
- $\mathsf{P}(X > x) = 1 - F(x)$.

Además, para variables aleatorias discretas

$$\mathsf{P}(X = x) = F(x) - F(x - 1).$$

Definición 3 (función de densidad):

Si existe una función $f(x)$ tal que

(a) $f(x) \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$.

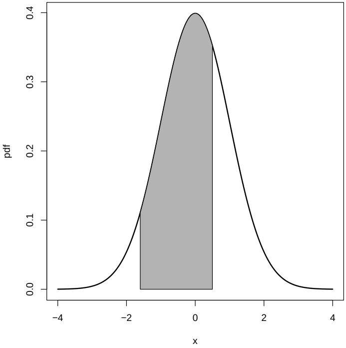
(b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathsf{d}x = 1$.

(c) $\mathsf{P}(a \leq X \leq b) = \displaystyle\int_{a}^{b} f(x)\,\mathsf{d}x$, para $a, b \in \mathbb{R}$.

Entonces $f(x)$ es la función de densidad de la variable aleatoria continua X.

Variable aleatoria

Sabemos que el área total bajo $f(x)$ es 1, entonces $\mathsf{P}(a \leq X \leq b)$ es el área acotada por las rectas $x = a$ y $x = b$.



Variable aleatoria

Para variables aleatorias continuas,

$$\mathsf{P}(X = a) = \int_a^a f(t)\,\mathsf{d}t = 0.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} F(x) &= \mathsf{P}(X \leq x) = \mathsf{P}(X < x) \\ &= \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathsf{d}t \end{aligned}$$

Además,

$$\mathsf{P}(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$$

$$\frac{\mathsf{d}F(x)}{\mathsf{d}x} = f(x)$$

Evidentemente, también

$$1 = F(+\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathsf{d}x$$

Ejemplo:

Considere la función,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1, \\ kx^2, & -1 < x \leq 1, \\ 0, & x > 1, \end{cases}$$

Para que $f(x)$ sea una función de densidad, debemos tener que

$$1 = \int_{-1}^{1} f(x)\,\mathsf{d}x = k\int_{-1}^{1} x^2\,\mathsf{d}x = k\,\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = \frac{k}{3}\big(1^3 - (-1)^3\big) = \frac{2k}{3}.$$

Es decir, $k = 3/2$.

Ejemplo:

Suponga

$$f(x) = k\exp(-x/2), \qquad x > 0.$$

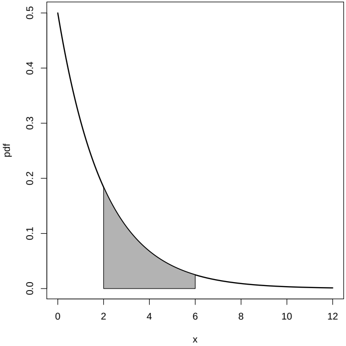
Evidentemente,

$$\begin{aligned} 1 &= \int_0^\infty k\exp(-x/2)\,\mathsf{d}x = k\int_0^\infty \exp(-x/2)\,\mathsf{d}x = -2k\exp(-x/2)\Big|_0^\infty \\ &= -2k\Big[\lim_{z\to\infty}\exp(-z/2) - \exp(0)\Big] = 2k. \end{aligned}$$

De ahí que $k = 1/2$. Luego,

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^x f(t)\,\mathsf{d}t = \int_{-\infty}^0 0\,\mathsf{d}t + \frac{1}{2}\int_0^x \exp(-t/2)\,\mathsf{d}t \\ &= 1 - \exp(-x/2), \qquad x > 0. \end{aligned}$$

Considere $\mathsf{P}(2 < X < 6)$, es decir:



De este modo,

$$
\begin{aligned}
\mathsf{P}(2 < X < 6) &= \frac{1}{2}\int_2^6 \exp(-x/2)\,\mathsf{d}x = F(6) - F(2) \\
&= [1 - \exp(-3)] - [1 - \exp(-1)] = 0.9502 - 0.6321 \\
&= 0.3181
\end{aligned}
$$

Adicionalmente,

$$
\mathsf{P}(X < 8) = F(8) = 1 - \exp(-4) = 0.9817,
$$

y

$$
\mathsf{P}(X \geq 8) = 1 - F(8) = 1 - 0.9817 = 0.0183.
$$

Definición 4 (Esperanza):

Sea X variable aleatoria. La esperanza (siempre que exista) de X es definida por:

- Para X discreta
$$\mathsf{E}(X) = \sum_{x \in \mathcal{X}} x\, p(x),$$
- Si X es continua
$$\mathsf{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, \mathsf{d}x.$$

En general, tenemos

$$\mathsf{E}\{g(X)\} = \sum_{x \in \mathcal{X}} g(x) p(x), \qquad \mathsf{E}\{g(X)\} = \int_{\mathbb{R}} g(x) f(x)\, \mathsf{d}x.$$

Propiedades:

(a) $\mathsf{E}(a) = a$, para a una constante,

(b) $\mathsf{E}(aX + b) = a\,\mathsf{E}(X) + b$,

(c) $\mathsf{E}(a_1 X + a_2 Y) = a_1\,\mathsf{E}(X) + a_2\,\mathsf{E}(Y)$,

(d) Si $g(x) \geq 0$, para todo x. Entonces $\mathsf{E}\{g(X)\} \geq 0$.

(e) $\mathsf{E}\{g_1(X)\} \leq \mathsf{E}\{g_2(X)\}$ si $g_1(X) \leq g_2(X)$.

Demostración:

En efecto, (a) sigue desde

$$\begin{aligned}\mathsf{E}(aX + b) &= \int_{-\infty}^{\infty} (ax + b) f(x)\,\mathrm{d}x = a \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x + b \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= a\,\mathsf{E}(X) + b.\end{aligned}$$

las propiedades restantes se muestran de forma similar (Tarea).

Definición 5 (Varianza):

Sea X variable aleatoria. La varianza de X es definida como:

$$\mathsf{var}(X) = \mathsf{E}[\{X - \mathsf{E}(X)\}^2].$$

Suponga $\mu = \mathsf{E}(X)$. Entonces, podemos escribir

$$\mathsf{var}(X) = \sum_{x \in \mathcal{X}} (x - \mu)^2 p(x),$$

para X discreta, y

$$\mathsf{var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x)\, \mathrm{d}x,$$

si X es continua.

Propiedades:

(a) $\operatorname{var}(X) = \mathsf{E}(X^2) - \mathsf{E}^2(X)$.

(b) $\operatorname{var}(aX + b) = a^2 \operatorname{var}(X)$.

Demostración:

Tenemos

$$(X - \mathsf{E}(X))^2 = X^2 - 2X\,\mathsf{E}(X) + \mathsf{E}^2(X),$$

de ahí que

$$\operatorname{var}(X) = \mathsf{E}[\{X - \mathsf{E}(X)\}^2] = \mathsf{E}(X^2) - 2\,\mathsf{E}(X)\,\mathsf{E}(X) + \mathsf{E}^2(X) = \mathsf{E}(X^2) - \mathsf{E}^2(X).$$

Ahora, para notar (b), sea $Y = aX + b$ y note que

$$Y - \mathsf{E}(Y) = aX + b - a\,\mathsf{E}(X) - b = a(X - \mathsf{E}(X)).$$

De este modo,

$$\operatorname{var}(Y) = \mathsf{E}[\{Y - \mathsf{E}(Y)\}^2] = \mathsf{E}[a^2\{X - \mathsf{E}(X)\}^2] = a^2 \operatorname{var}(X).$$

Finalmente, podemos definir el r-ésimo momento de X como

$$\mu_r = \mathsf{E}(X^r),$$

mientras que el r-ésimo momento centrado, es dado por:

$$\mu_r' = \mathsf{E}\{(X - \mu)^r\},$$

con $\mu = \mu_1 = \mathsf{E}(X)$.

De este modo es fácil notar que

$$\mathsf{var}(X) = \mu_2 - \mu_1^2.$$

Ejemplo:

Suponga

$$p(x) = \mathsf{P}(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, \qquad x \in \{0, 1, 2, \dots\}.$$

Evidentemente

$$\begin{aligned}\sum_{x=0}^{\infty} p(x) &= \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} \\ &= e^{-\lambda}\Big(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^3}{3!} + \cdots\Big) \\ &= e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1.\end{aligned}$$

Note que

$$
\begin{aligned}
\mathsf{E}(X) &= \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{\lambda^x}{x!} \\
&= e^{-\lambda}\Big(0 + 1\,\frac{\lambda}{1!} + 2\,\frac{\lambda^2}{2!} + 3\,\frac{\lambda^3}{3!} + \cdots\Big) \\
&= e^{-\lambda}\lambda\Big(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^3}{3!} + \cdots\Big) \\
&= \lambda e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{y=0}^{\infty} \frac{\lambda^y}{y!},
\end{aligned}
$$

con $y = x - 1$. De ahí que

$$\mathsf{E}(X) = \lambda$$

Resultado 1 (Desigualdad de Chebyshev):

Sea X variable aleatoria y $g(\cdot)$ función no negativa. Entonces, para $k > 0$,

$$\mathsf{P}(g(X) \geq k) \leq \frac{\mathsf{E}(g(X))}{k}.$$

En particular,

$$\mathsf{P}(|X-\mu| \geq r\sigma) = \mathsf{P}((X-\mu)^2 \geq r^2\sigma^2) \leq \frac{1}{r^2}, \qquad r > 0.$$

o equivalentemente,

$$\mathsf{P}(|X-\mu| < r\sigma) \geq 1 - \frac{1}{r^2},$$

donde $\mu = \mathsf{E}(X)$ y $\sigma^2 = \mathsf{var}(X)$.

Definición 6 (Función generadora de momentos):

Sea X variable aleatoria con densidad $f(x)$ se define la función generadora de momentos (MGF) de X como

$$M_X(t) = \mathsf{E}(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)\, \mathrm{d}x, \qquad |t| < h.$$

Observación:

Es posible probar que

$$\frac{\mathrm{d}^r}{\mathrm{d}t^r} M_X(t)\Big|_{t=0} = \mathsf{E}(X^r) = \mu_r$$