MAT-206/360: Inferencia Estadística **Nombre:** ____________________

Certamen 1. Octubre 23, 2018

Tiempo: 90 minutos **Profesor:** Felipe Osorio

---

1. (25 pts) Asuma que $X_1,\dots,X_n$ son variables aleatorias independientes con $X_i \sim \mathsf{N}(\alpha+\beta z_i, 1)$ donde $z_1,\dots,z_n$ son constantes observadas y α, β son parámetros desconocidos. Muestre que la distribución conjunta para $\boldsymbol{X} = (X_1,\dots,X_n)^\top$ forma una familia exponencial e identifique las estadísticas T_1 y T_2.

2. (25 pts) Suponga la variable aleatoria X con función de densidad

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \dfrac{\exp\{-\frac{1}{2}(x-\theta)^2\}}{\sqrt{2\pi}\Phi(\theta)}, & x > 0, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

donde $\Phi(\cdot)$ denota la CDF de la distribución normal estándar. Determine la función generadora de momentos así como la esperanza y varianza de X.

3. Considere variables aleatorias independientes $X_1,\dots,X_n$ y $Y_1,\dots,Y_n$ desde una distribución $\mathsf{N}(\mu,\sigma^2)$ y $\mathsf{N}(\mu,\lambda\sigma^2)$, respectivamente, donde μ es conocido.

a. (10 pts) Suponga que $\sigma^2 > 0$ es conocido. Obtenga el MLE de $\lambda > 0$.

b. (15 pts) Asuma que ámbos σ^2 y λ son desconocidos. Obtenga el MLE de $\boldsymbol{\theta} = (\sigma^2,\lambda)^\top$.

4. Suponga $X_1,\dots,X_n$ variables aleatorias IID con densidad común

$$f(x;\theta) = \frac{\theta\exp(\theta x)}{2\sinh(\theta)}, \qquad x \in (-1,1),$$

y sea $Y_i = I\{X_i > 0\}$. Si $\theta = 0$ los X_i's son uniformemente distribuídos en $(-1,1)$

a. (10 pts) Presente una ecuación de estimación para el MLE, $\widehat{\theta}_X$ basado en $X_1,\dots,X_n$.

b. (15 pts) Halle el MLE, $\widehat{\theta}_Y$ basado en $Y_1,\dots,Y_n$.

Pauta de corrección: