MAT-206/360: Inferencia Estadística **Pauta de Corrección**
Certamen 1. Octubre 23, 2018
Tiempo: 90 minutos Felipe Osorio

---

1. La densidad conjunta adopta la forma

$$f(\boldsymbol{x};\alpha,\beta) = \prod_{i=1}^n (2\pi)^{-1/2} \exp\Big\{-\frac{1}{2}(x_i-\alpha-\beta z_i)^2\Big\}$$
$$= (2\pi)^{-n/2} \exp\Big\{\alpha\sum_{i=1}^n x_i + \beta\sum_{i=1}^n z_i x_i - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n(\alpha+\beta z_i)^2\Big\},$$

que corresponde a una familia exponencial 2-paramétrica con $T_1 = \sum_{i=1}^n X_i$ y $T_2 = \sum_{i=1}^n z_i X_i$.

2. Note que

$$f(x;\theta) = \phi(x)\exp\{\theta x - \log\Phi(\theta) - \theta^2/2\}.$$

Es decir X pertenece a la FE canónica (1-paramétrica), con $b(\theta) = \log\Phi(\theta) + \theta^2/2$. De este modo, obtenemos

$$M_X(t) = \exp\{b(\theta+t) - b(\theta)\} = \Phi(\theta+t)\exp(t\theta + t^2/2)/\Phi(\theta).$$

Luego, sigue que

$$\mathrm{E}(X) = b'(\theta) = \theta + \phi(\theta)/\Phi(\theta)$$
$$\mathrm{var}(X) = b''(\theta) = 1 - \theta\phi(\theta)/\Phi(\theta) - \phi^2(\theta)/\Phi^2(\theta)$$

3. a. Sea $\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, la función de verosimilitud es dada por

$$L(\lambda;\boldsymbol{z}) = (2\pi\sigma^2)^{-n/2}\exp\Big\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n(x_i-\mu)^2\Big\}(2\pi\lambda\sigma^2)^{-n/2}\exp\Big\{-\frac{1}{2\lambda\sigma^2}\sum_{j=1}^n(y_j-\mu)^2\Big\}$$
$$\propto \lambda^{-n/2}\exp\Big\{-\frac{1}{2\lambda\sigma^2}\sum_{j=1}^n(y_j-\mu)^2\Big\},$$

mientras que la función de log-verosimilitud asume la forma

$$\ell(\lambda;\boldsymbol{z}) = -\frac{n}{2}\log\lambda - \frac{1}{2\lambda\sigma^2}\sum_{j=1}^n(y_j-\mu)^2 + k_1,$$

donde k_1 representa una constante, y $\widehat{\lambda}_{\mathsf{ML}}$ es solución de:

$$U(\lambda;\boldsymbol{z}) = -\frac{n}{2\lambda} + \frac{1}{2\lambda^2\sigma^2}\sum_{j=1}^n(y_j-\mu)^2 = 0,$$

de este modo,

$$\widehat{\lambda}_{\mathsf{ML}} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n\Big(\frac{y_j-\mu}{\sigma}\Big)^2.$$

Además

$$\ell''(\widehat{\lambda}_{\mathsf{ML}};\boldsymbol{z}) = -\frac{n^4}{2\widehat{\lambda}_{\mathsf{ML}}} < 0.$$

3. b. Considerando σ^2 y λ desconocido sigue que

$$\ell(\lambda,\sigma^2;\boldsymbol{z}) = -n\log\sigma^2 - \frac{n}{2}\log\lambda - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2 - \frac{1}{2\lambda\sigma^2}\sum_{j=1}^n (y_j-\mu)^2 + k_2$$

para k_2 denotando una constante. El MLE de $\boldsymbol{\theta} = (\lambda,\sigma^2)^\top$ es solución de:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\ell(\lambda,\sigma^2;\boldsymbol{z})}{\partial\lambda} &= -\frac{n}{2\lambda} + \frac{1}{2\lambda^2\sigma^2}\sum_{j=1}^n (y_j-\mu)^2 = 0\\ \frac{\partial\ell(\lambda,\sigma^2;\boldsymbol{z})}{\partial\sigma^2} &= -\frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2 + \frac{1}{2\lambda\sigma^4}\sum_{j=1}^n (y_j-\mu)^2 = 0.\end{aligned}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones anterior, obtenemos

$$\widehat{\lambda}_{\mathsf{ML}} = \frac{\sum_{j=1}^n (y_j-\mu)^2}{\sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2}, \qquad \widehat{\sigma}^2_{\mathsf{ML}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2.$$

4. a. La densidad conjunta para $\boldsymbol{X} = (X_1,\dots,X_n)^\top$ puede ser escrita como:

$$\exp\{\theta T(x) - n\log((2\sinh\theta)/\theta)\},$$

donde $T(x) = \sum_{i=1}^n x_i$. Es decir, X pertenece a la familia exponencial, y el estimador máximo verosímil $\widehat{\theta}_X$ es solución de la ecuación:

$$\frac{T(x)}{n} = \frac{b'(\theta)}{n} = \coth\theta - \frac{1}{\theta}.$$

4. b. Los datos $Y_1,\dots,Y_n$ son variables IID con distribución Bernoulli y probabilidad de exito,

$$p = \mathrm{P}(X_i > 0) = \frac{e^\theta - 1}{e^\theta - e^{-\theta}}.$$

Además, podemos notar que

$$1 - p = \frac{1 - e^{-\theta}}{e^\theta - e^{-\theta}} = \frac{p}{e^\theta},$$

es decir, $\theta = \log(p/(1-p))$. Así, el estimador máximo verosímil de p, basado en $Y_1,\dots,Y_n$ es

$$\widehat{p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i,$$

y por tanto, $\widehat{\theta}_Y = \log(\widehat{p}/(1-\widehat{p}))$.