MAT-206/360: Inferencia Estadística **Pauta de Corrección**
Certamen 2. Noviembre 27, 2018
Tiempo: 90 minutos Felipe Osorio

---

1. Para $x_1, \dots, x_k$, muestra aleatoria desde una distribución $\mathsf{Bin}(n,p)$. Tenemos,

$$\mu_1 = np, \qquad \mu_2 = npq + (np)^2,$$

con $q = 1 - p$. Substituyendo μ_1 en μ_2, tenemos

$$\mu_2 = \mu_1 q + \mu_1^2 = \mu_1(1-p) + \mu_1^2 = \mu_1 - \mu_1 p + \mu_1^2,$$

es decir, $\mu_1 p = \mu_1 - (\mu_2 - \mu_1^2)$, lo que lleva a

$$p = 1 - \frac{\mu_2 - \mu_1^2}{\mu_1}.$$

Mientras que

$$n = \frac{\mu_1}{p} = \frac{\mu_1}{1 - (\mu_2 - \mu_1^2)/\mu_1} = \frac{\mu_1^2}{\mu_1 - (\mu_2 - \mu_1^2)}.$$

Finalmente, subtituyendo por sus contrapartes muestrales, obtenemos

$$\begin{aligned}\widehat{p}_{\mathsf{MM}} &= 1 - \frac{m_2 - \overline{x}^2}{\overline{x}} = 1 - \frac{s^2}{\overline{x}},\\ \widehat{n}_{\mathsf{MM}} &= \frac{\overline{x}^2}{\overline{x} - s^2}.\end{aligned}$$

2. Se desea obtener $\widetilde{\theta}_1$, $\widetilde{\theta}_2$ tal que maximicen la función de log-verosimilitud

$$\begin{aligned}\ell(\boldsymbol{\theta}) &= \ell(\theta_1, \theta_2, \theta_1 + \theta_2)\\ &= \log(\theta_1)\sum_{i=1}^n X_i + \log(\theta_2)\sum_{i=1}^n Y_i + \log(\theta_1 + \theta_2)\sum_{i=1}^n Z_i\\ &\quad - n\theta_1 - n\theta_2 - n(\theta_1 + \theta_2) - \sum_{i=1}^n \log(X_i!\, Y_i!\, Z_i!),\end{aligned}$$

dividiendo por n y desconsiderando aquellos términos que no dependen de $\boldsymbol{\theta}$, sigue

$$\overline{X}\log\theta_1 + \overline{Y}\log\theta_2 + \overline{Z}\log(\theta_1 + \theta_2) - 2(\theta_1 + \theta_2).$$

Derivando con relación a θ_1 y θ_2 e igualando a cero, resulta

$$\frac{\overline{X}}{\theta_1} + \frac{\overline{Z}}{\theta_1 + \theta_2} = 2, \tag{1}$$

$$\frac{\overline{Y}}{\theta_2} + \frac{\overline{Z}}{\theta_1 + \theta_2} = 2. \tag{2}$$

De este modo, $\overline{X}/\theta_1 = \overline{Y}/\theta_2$ y por tanto

$$\frac{\overline{Z}}{\widetilde{\theta}_1 + \widetilde{\theta}_2} = \frac{\overline{Z}}{\widetilde{\theta}_2(1 + \overline{X}/\overline{Y})}.$$

Usando en (2), obtenemos

$$2\widetilde{\theta}_2 = \overline{Y} + \frac{\overline{Z}}{1 + \overline{X}/\overline{Y}} = \overline{Y}\Big(\frac{\overline{X} + \overline{Y} + \overline{Z}}{\overline{X} + \overline{Y}}\Big).$$

Lo que lleva a

$$\widetilde{\theta}_1 = \frac{\overline{X}}{2}\Big(\frac{\overline{X} + \overline{Y} + \overline{Z}}{\overline{X} + \overline{Y}}\Big), \qquad \widetilde{\theta}_2 = \frac{\overline{Y}}{2}\Big(\frac{\overline{X} + \overline{Y} + \overline{Z}}{\overline{X} + \overline{Y}}\Big),$$

y

$$\widetilde{\theta}_3 = \widetilde{\theta}_1 + \widetilde{\theta}_2 = \frac{\overline{X} + \overline{Y} + \overline{Z}}{2}.$$

3. Para $X \sim \mathsf{U}(0, \theta)$, tenemos que $\mathrm{E}(X) = \theta/2$. De este modo,

$$\widehat{\theta}_{\mathsf{MM}} = 2\overline{X}.$$

Por otro lado, para una muestra aleatoria $x_1, \dots, x_n$ desde una distribución $\mathsf{U}(0, \theta)$, la función de verosimilitud es dada por

$$L(\theta; \boldsymbol{x}) = \frac{1}{\theta^n} \prod_{i=1}^n I_{[0,\theta]}(x_i).$$

Ahora, notando que $0 \leq x_i \leq \theta$ puede ser escrito como $x_i \leq \theta < \infty$, sigue que

$$\prod_{i=1}^n I_{[x_i,\infty)}(\theta) = 1 \quad \iff \quad I_{[x_i,\infty)}(\theta) = 1,\ \forall i,$$

es decir, $x_i \leq \theta$ para todo i. Sea $x_{(n)} = \max\{x_1, \dots, x_n\}$. Por tanto,

$$x_i \leq \theta,\ \forall i, \quad \iff \quad x_{(n)} \leq \theta, \quad \iff \quad I_{[x_{(n)},\infty)}(\theta) = 1,$$

así, podemos escribir

$$L(\theta; \boldsymbol{x}) = \frac{1}{\theta^n} I_{[x_{(n)},\infty)}(\theta).$$

Debido a que $1/\theta^n$ es función monótona decreciente, sigue que

$$L(\theta; \boldsymbol{x}) \leq \frac{1}{x_{(n)}^n},$$

y por tanto $\widehat{\theta}_{\mathsf{ML}} = X_{(n)}$. Por otro lado, note que las función de distribución y de densidad del máximo para $Z_1, \dots, Z_n$ variables IID cada una con CDF F y densidad f son dadas, respectivamente, por:

$$F_{\max}(t) = \mathrm{P}(Z_i \leq t, \forall\, i) = F^n(t), \qquad \text{y} \qquad f_{\max}(t) = nf(t)F^{n-1}(t).$$

De este modo, para $X_1, \dots, X_n$ variables IID desde $\mathsf{U}(0, \theta)$, obtenemos:

$$\mathrm{E}(X_{(n)}) = \frac{n}{\theta^n}\int_0^\theta x^n \,\mathrm{d}x = \frac{n\theta}{n+1}, \qquad \mathrm{E}(X_{(n)}^2) = \frac{n}{\theta^n}\int_0^\theta x^{n+1} \,\mathrm{d}x = \frac{n\theta^2}{n+2}.$$

a. Note que

$$\mathrm{E}(\overline{X}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}(X_i) = \frac{\theta}{2},$$

de ahí que $\mathrm{E}(\widehat{\theta}_{\mathsf{MM}}) = \theta$. De este modo,

$$\mathrm{MSE}(\widehat{\theta}_{\mathsf{MM}}) = \mathrm{var}(\widehat{\theta}_{\mathsf{MM}}) = \mathrm{var}(2\overline{X}) = \frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{var}(X_i) = \frac{4}{n}\,\mathrm{var}(X_1) = \frac{4}{n}\frac{\theta^2}{12} = \frac{\theta^2}{3n}.$$

b. Es sesgo del estimador máximo verosímil para θ es dado por:

$$\mathrm{bias}(\widehat{\theta}_{\mathsf{ML}}, \theta) = E(X_{(n)}) - \theta = \frac{n\theta}{n+1} - \theta = -\frac{\theta}{n+1},$$

mientras que la varianza asume la forma

$$\mathrm{var}(\widehat{\theta}_{\mathsf{ML}}) = \mathrm{E}(X_{(n)}^2) - \mathrm{E}^2(X_{(n)}) = \frac{n\theta^2}{n+2} - \frac{n^2\theta^2}{(n+1)^2} = \frac{n\theta^2}{(n+2)(n+1)^2}.$$

De ahí que el MSE para el estimador ML puede ser escrito como:

$$\mathrm{MSE}(\widehat{\theta}_{\mathsf{ML}}) = \mathrm{var}(\widehat{\theta}_{\mathsf{ML}}) + \mathrm{bias}^2(\widehat{\theta}_{\mathsf{ML}}, \theta) = \frac{n\theta^2}{(n+2)(n+1)^2} + \frac{\theta^2}{(n+1)^2} = \frac{2\theta^2}{(n+1)(n+2)}.$$

c. Para comparar $\widehat{\theta}_{\mathsf{MM}}$ con $\widehat{\theta}_{\mathsf{ML}}$, considere:

$$\mathrm{MSE}(\widehat{\theta}_{\mathsf{MM}}) - \mathrm{MSE}(\widehat{\theta}_{\mathsf{ML}}) = \frac{\theta^2}{3n} - \frac{2\theta^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{\theta^2}{3n(n+1)(n+2)}(n^2 - 3n + 2) > 0.$$

De este modo, el estimador ML es mejor que el obtenido por el MM (para cualquier n).

4. a. Tenemos

$$\Phi_n(\theta) = \sum_{i=1}^{n} u_i(\theta),$$

donde $u_i(\theta) = Y_i - X_i/\theta$. Notando que $\mathrm{E}\{u_i(\theta)\} = \mathrm{E}(Y_i) - \mathrm{E}(X_i)/\theta = 0$, y

$$\mathrm{E}\Big\{\frac{\mathrm{d}\,u_i(\theta)}{\mathrm{d}\,\theta}\Big\} = \frac{1}{\theta^2}\,\mathrm{E}(X_i) = \frac{1}{\theta}\,\mathrm{E}(Y_i).$$

Mientras que $\mathrm{var}\{u_i(\theta)\} = \mathrm{E}\{u_i^2(\theta)\}$. Por tanto, la función de estimación óptima en $\mathcal{L}(u_i)$ asume la forma

$$\Psi_n(\theta) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\mathrm{E}(Y_i)/\theta}{\mathrm{E}\{u_i^2(\theta)\}}u_i(\theta) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\mathrm{E}(Y_i)}{\mathrm{E}\{u_i^2(\theta)\}}\frac{(Y_i - X_i/\theta)}{\theta}.$$

4. b. Es fácil notar que la información de Godambe para $\Phi_n(\theta)$ asume la forma

$$\begin{aligned} J_\Phi(\theta) &= \mathrm{E}\Big\{\frac{\mathrm{d}\,\Phi_n(\theta)}{\mathrm{d}\,\theta}\Big\}\big(\mathrm{var}\{\Phi_n(\theta)\}\big)^{-1}\,\mathrm{E}\Big\{\frac{\mathrm{d}\,\Phi_n(\theta)}{\mathrm{d}\,\theta}\Big\} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}\Big\{\frac{\mathrm{d}\,u_i(\theta)}{\mathrm{d}\,\theta}\Big\}\Big(\sum_{i=1}^{n}\mathrm{var}\{u_i(\theta)\}\Big)^{-1}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}\Big\{\frac{\mathrm{d}\,u_i(\theta)}{\mathrm{d}\,\theta}\Big\}. \end{aligned}$$

Usando los resultados obtenidos en la parte **4.a)** y escalando de forma apropiada, obtenemos

$$\begin{aligned}
J_\Phi(\theta) &= n\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathrm{E}\Big\{\frac{\mathrm{d}\,u_i(\theta)}{\mathrm{d}\,\theta}\Big\}\Big)^2\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathrm{var}\{u_i(\theta)\}\Big)^{-1} \\
&= \frac{n(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathrm{E}(Y_i)/\theta)^2}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathrm{E}\{u_i^2(\theta)\}}.
\end{aligned}$$