MAT-206/360: Inferencia Estadística **Nombre:** ______________________

Certamen 3. Diciembre 13, 2018

Tiempo: 90 minutos **Profesor:** Felipe Osorio

---

1. (25 pts) Considere $X_1, \dots, X_n$ una m.a.(n) desde $\mathcal{N}(\theta, 1)$ y defina

$$Y_i = \begin{cases} 1, & X_i > 0, \\ 0, & X_i \leq 0. \end{cases}$$

Sea $\psi = \mathrm{P}(Y_1 = 1)$. Obtenga un intervalo de confianza asintótico para ψ.

2. Sean $X_1, \dots, X_n$ variables aleatorias independientes tal que $X_i \sim \mathsf{Exp}(\theta)$, para $i = 1, \dots, n$. Considere

$$Q(\boldsymbol{X}; \theta) = 2\theta \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

cuya función de densidad es dada por:

$$f_Q(y) = \frac{1}{2^n \Gamma(n)}\, y^{n-1} \exp(-y/2), \qquad y > 0.$$

Es decir, $Q(\boldsymbol{X}; \theta) \sim \chi^2_{2n}$.

a. (10 pts) ¿$Q(\boldsymbol{X}; \theta)$ es cantidad pivotal? Justifique.

b. (15 pts) Usando $Q(\boldsymbol{X}; \theta)$, determine un intervalo de confianza del $100(1-\alpha)\%$ para θ.

3. (25 pts) Muestre que la distribución exponencial con densidad $f(x) = \theta \exp(-\theta x)$, $x > 0$ tiene razón de verosimilitud monótona. Halle el test UMP para la hipótesis a una cola, $H_0 : \theta \leq \theta_0$ versus $H_1 : \theta > \theta_0$.

4. Considere $\boldsymbol{X} = (X_1, \dots, X_n)$ muestra de observaciones independientes con $X_i \sim \mathsf{Poi}(n_i \lambda)$ con n_i conocido y

$$p_i(x) = \frac{(n_i \lambda)^x}{x!} \exp(-n_i \lambda).$$

a. (10 pts) ¿La distribución de $\boldsymbol{X}$ tiene razón de verosimilitud monótona?

b. (15 pts) Derive el test UMP para $H_0 : \lambda \geq 1$ versus $H_1 : \lambda < 1$.

Pauta de corrección: