MAT-206/360: Inferencia Estadística **Pauta de Corrección**
Certamen 3. Diciembre 13, 2018
Tiempo: 90 minutos Felipe Osorio

---

1. Primeramente, note que para una m.a.(n) desde una $\mathcal{N}(\theta, 1)$ tenemos

$$\ell(\theta) = -\frac{n}{2}\log 2\pi - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \theta)^2.$$

De este modo la función score adopta la forma $U_n(\theta) = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \theta)$ y por tanto, $\widehat{\theta}_{\mathsf{ML}} = \overline{X}$. Además,

$$U_n'(\theta) = -n, \qquad \mathcal{F}_n(\theta) = \mathrm{E}\{-U_n'(\theta)\} = n.$$

Lo que lleva a $\widehat{\mathsf{SE}}(\widehat{\theta}) = 1/\sqrt{n}$.

Ahora, podemos notar que

$$\begin{aligned}\psi &= \mathrm{P}(Y_1 = 1) = \mathrm{P}(X_1 > 0) = 1 - \mathrm{P}(X_1 \leq 0) = 1 - \mathrm{P}(X_1 - \theta \leq 0 - \theta)\\ &= 1 - \mathrm{P}(Z \leq -\theta) = 1 - \Phi(-\theta),\end{aligned}$$

donde $\Phi(\cdot)$ representa la CDF de una distribución normal estándar. Es decir, tenemos que $\psi = g(\theta)$, con $g(\theta) = 1 - \Phi(-\theta)$. Así, por la invarianza de los estimadores de ML, sigue que

$$\widehat{\psi}_{\mathsf{ML}} = 1 - \Phi(-\widehat{\theta}_{\mathsf{ML}}) = 1 - \Phi(-\overline{X}).$$

Sabemos también que $\widehat{\mathsf{SE}}(\widehat{\psi}) = |g'(\widehat{\theta})|\widehat{\mathsf{SE}}(\widehat{\theta})$, y dado que $g'(\theta) = \Phi'(-\theta) = \phi(-\theta)$. Obtenemos

$$\widehat{\mathsf{SE}}(\widehat{\psi}_{\mathsf{ML}}) = \phi(-\widehat{\theta}_{\mathsf{ML}})\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Lo que permite escribir un intervalo de confianza asintótico del $100(1-\alpha)\%$ para ψ como:

$$\mathrm{IC}_n(\psi) = \Big[\widehat{\psi}_{\mathsf{ML}} - z_{1-\alpha/2}\frac{\phi(-\overline{x})}{\sqrt{n}}, \widehat{\psi}_{\mathsf{ML}} + z_{1-\alpha/2}\frac{\phi(-\overline{x})}{\sqrt{n}}\Big],$$

con $z_{1-\alpha/2}$ siendo un valor cuantil $1-\alpha/2$ de la distribución $\mathcal{N}(0,1)$.

2. Sabemos que

$$Q(\boldsymbol{X};\theta) = 2\theta\sum_{i=1}^{n}X_i \sim \chi^2(2n).$$

a. Como la distribución de $Q(\boldsymbol{X};\theta)$ **no** depende de θ, sigue que **es** una cantidad pivotal.

b. Se desea un intervalo para θ, tal que

$$\mathrm{P}\left(q_1 \leq 2\theta\sum_{i=1}^{n}X_i \leq q_2\right) = 1 - \alpha,$$

donde q_1 y q_2 son valores cuantiles desde la distribución $\chi^2(2n)$,* así

$$\mathrm{P}\left(\frac{q_1}{2n\overline{X}} \leq \theta \leq \frac{q_2}{2n\overline{X}}\right) = 1 - \alpha.$$

---

*Una alternativa es considerar $q_1 = \chi^2_{\alpha/2}(2n)$ y $q_2 = \chi^2_{1-\alpha/2}(2n)$.

De este modo un intervalo de confianza del $100(1-\alpha)\%$ para θ es dado por

$$\mathrm{IC}(\theta) = \Big[\frac{q_1}{2n\overline{X}}, \frac{q_2}{2n\overline{X}}\Big].$$

3. La distribución exponencial $X \sim \mathsf{EXP}(\theta)$ pertenece a la familia exponencial, pues su densidad es de la forma $f(x;\theta) = \theta\exp(-\theta x)$, con $x > 0$. De este modo, para una muestra IID la estadística suficiente es dada por $T(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^n x_i$ y $T \sim \mathsf{EXP}(n\theta)$. Además el modelo tiene MLR en $-T$.

Para probar $H_0 : \theta \leq \theta_0$ versus $H_1 : \theta > \theta_0$. El test UMP de tamaño α (aplicando el Teorema de Blackwell) es dado por:

$$\psi(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, & \text{si } T < k, \\ 0, & \text{si } T \geq k, \end{cases}$$

donde $k = -\log(1-\alpha)/(n\theta_0)$.

4. a. Note que podemos escribir la distribución conjunta en la familia exponencial como

$$\begin{aligned} p(\boldsymbol{x};\lambda) &= \prod_{i=1}^n p_i(x;\lambda) = \prod_{i=1}^n \frac{(n_i\lambda)^{x_i}}{x_i!}\exp(-n_i\lambda) \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{n_i^{x_i}}{x_i!}\exp\Big(-\lambda\sum_{i=1}^n n_i\Big)\exp\Big(\log\lambda\sum_{i=1}^n x_i\Big), \end{aligned}$$

con estadística suficiente $T(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^n x_i$. Lo que permite notar que esta familia tiene MLR en $T(\boldsymbol{x})$.

4. b. Aplicando el Teorema de Blackwell, sigue que el test UMP de tamaño α es dado por

$$\psi(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, & \text{si } T < c, \\ \gamma, & \text{si } T = c, \\ 0, & \text{si } T > c, \end{cases}$$

con c y γ tales que

$$\mathrm{P}_0(T < c) + \gamma\,\mathrm{P}_0(T = c) = \alpha,$$

donde $\mathrm{P}_0 = \mathsf{Poi}(N)$, $N = \sum_{i=1}^n n_i$.