MAT-206/360: Inferencia Estadística **Pauta de Corrección**
Examen. Diciembre 20, 2018
Tiempo: 90 minutos Felipe Osorio

---

1. Primeramente, calculamos el momento k-ésimo,

$$\mu_k = \mathrm{E}(X^k) = \theta \int_\theta^\infty x^{k-2}\,\mathrm{d}x = \theta\Big\{\lim_{x\to\infty} \frac{x^{k-1}}{k-1} - \frac{\theta^{k-1}}{k-1}\Big\},$$

así para $k < 1$, obtenemos

$$\mu_k = \theta\,\frac{\theta^{k-1}}{1-k} = \frac{\theta^k}{1-k}, \qquad k < 1.$$

Por tanto, usando $k = \frac{1}{2}$, tenemos que $\mu_{1/2} = 2\sqrt{\theta}$. Luego, por el método de los momentos debemos resolver la ecuación $\mu_{1/2} = m_{1/2}$. De ahí que

$$2\sqrt{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^{1/2} \qquad \Longrightarrow \qquad \widehat{\theta}_{\mathsf{MM}} = \frac{1}{4n^2}\Big(\sum_{i=1}^n x_i^{1/2}\Big)^2.$$

2. a. Sea $L(\lambda,\mu)$ la función de verosimilitud y $\overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i$, $\overline{Z} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i$. Por la independencia entre los Y_i's y Z_i' sigue que

$$\frac{\partial \log L(\lambda,\mu)}{\partial\lambda} = -\frac{n}{\lambda} + \frac{n\overline{Y}}{\lambda^2}, \qquad \frac{\partial \log L(\lambda,\mu)}{\partial\mu} = -\frac{n}{\mu} + \frac{n\overline{Z}}{\mu^2}.$$

De ahí que el MLE de (λ,μ) es $(\overline{Y},\overline{Z})$.

2. b. La función de densidad de (X_i,Δ_i) es

$$f(x_i,\Delta_i;\lambda,\mu) = \lambda^{-\Delta_i}\mu^{-(\Delta_i-1)}\exp\Big\{-\Big(\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}\Big)x_i\Big\}.$$

Sea $T = \sum_{i=1}^n X_i$ y $D = \sum_{i=1}^n \Delta_i$. Entonces,

$$L(\lambda,\mu) = \lambda^{-D}\mu^{D-n}\exp\big\{-(\lambda^{-1}+\mu^{-1})T\big\}.$$

Si $0 < D < n$, entonces

$$\frac{\partial \log L(\lambda,\mu)}{\partial\lambda} = -\frac{D}{\lambda} + \frac{T}{\lambda^2}, \qquad \frac{\partial \log L(\lambda,\mu)}{\partial\mu} = -\frac{D-n}{\mu} + \frac{T}{\mu^2},$$

y las ecuaciones de verosimilitud tienen solución única dada por $\widehat{\lambda} = T/D$ y $\widehat{\mu} = T/(n-D)$.

Por otro lado, si $D = 0$,

$$L(\lambda,\mu) = \mu^{-n}e^{-(1/\lambda+1/\mu)T},$$

que es una función creciente en λ. De ahí que no existe un MLE para λ. Análogamente, cuando $D = n$, no existe un MLE para μ.

3. Sabemos que

$$\widehat{\mu}_1 = \overline{X}, \qquad \widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(X_i - \overline{X})^2,$$
$$\widehat{\mu}_2 = \overline{Y}, \qquad \widehat{\phi}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2,$$

de este modo $\widehat{\delta} = \overline{X} - \overline{Y}$. Además,

$$\ell(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{z}) = \ell(\mu_1, \sigma^2; \boldsymbol{x}) + \ell(\mu_2, \phi^2; \boldsymbol{y}),$$

con $\boldsymbol{\theta} = (\mu_1, \sigma^2, \mu_2, \phi^2)^\top$, $\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{x}^\top, \boldsymbol{y}^\top)^\top$, donde

$$\ell(\mu_1, \sigma^2; \boldsymbol{x}) = -\frac{m}{2}\log 2\pi\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{m}(x_i - \mu_1)^2,$$
$$\ell(\mu_2, \phi^2; \boldsymbol{y}) = -\frac{n}{2}\log 2\pi\phi^2 - \frac{1}{2\phi^2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \mu_2)^2.$$

Por la independencia entre $\boldsymbol{X}$ e $\boldsymbol{Y}$ sigue que

$$\mathcal{F}_n(\delta) = \mathcal{F}_n(\mu_1) + \mathcal{F}_n(\mu_2),$$

(además $\widehat{\mu}_1 \perp \widehat{\sigma}^2$ y $\widehat{\mu}_2 \perp \widehat{\phi}^2$) con $\mathcal{F}_n(\mu_j) = \mathrm{E}\{-U'(\mu_j)\}$, para $j = 1, 2$. Tenemos

$$U(\mu_1) = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{m}(x_i - \mu_1)^2, \qquad U'(\mu_1) = -\frac{m}{\sigma^2},$$
$$U(\mu_2) = \frac{1}{\phi^2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \mu_2)^2, \qquad U'(\mu_2) = -\frac{n}{\phi^2},$$

de este modo

$$\mathcal{F}_n(\delta) = \frac{m}{\sigma^2} + \frac{n}{\phi^2}.$$

Finalmente, un intervalo de confianza del $100(1-\alpha)\%$ para δ asume la forma:

$$IC_n(\delta) = \left[\overline{x} - \overline{y} - \frac{z_{1-\alpha/2}}{(m/\widehat{\sigma}^2 + n/\widehat{\phi}^2)^{1/2}}, \overline{x} - \overline{y} + \frac{z_{1-\alpha/2}}{(m/\widehat{\sigma}^2 + n/\widehat{\phi}^2)^{1/2}}\right]$$

4. Note que

x	2	3	4	5	6	7	8
$p_0(x)/p_1(x)$	5	0.6667	33	0.5556	1	0.5	2

a) El test Neyman-Pearson para $\alpha = 0.02$ es dado por:

$$\psi_1(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } \{3\}, \\ 0, & \text{si } \{2,4,5,6,7,8\}. \end{cases}$$

b) El test Neyman-Pearson para $\alpha = 0.05$ asume la forma:

$$\psi_2(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } \{3\}, \\ \gamma, & \text{si } \{7\}, \\ 0, & \text{si } \{2,4,5,6,8\}, \end{cases}$$

con

$$\gamma = \frac{0.05 - p_0(3)}{p_0(7)} = \frac{0.05 - 0.02}{0.1} = 0.3$$

c) Para el test en **a)**, tenemos

$$\beta = 1 - p_1(3) = 1 - 0.3 = 0.7,$$

mientras que para el test en **b)**, sigue que

$$\beta = 1 - p_1(3) - 0.3p_1(7) = 1 - 0.3 - 0.3 \cdot 0.2 = 0.64.$$